

二项式定理

一、二项式定理

1. 二项式定理的概念

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 这个公式表示的定理叫做二项式定理.

2. 二项式系数、二项式的通项

$C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$ 叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式, 其中的系数

C_n^r ($r = 0, 1, 2, \dots, n$) 叫做二项式系数, 式中的 $C_n^r a^{n-r} b^r$ 叫做二项展开式的通项.

用 T_{r+1} 表示, 即通项为展开式的第 $r+1$ 项: $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$.

3. 二项式展开式的各项幂指数

二项式 $(a+b)^n$ 的展开式项数为 $n+1$ 项, 各项的幂指数状况是

(1) 各项的次数和都等于二项式的幂指数 n .

(2) 字母 a 的按降幂排列, 从第一项开始, 次数由 n 逐项减1直到零, 字母 b 按升幂排列, 从第一项起, 次数由零逐项增1直到 n .

4. 求指定项

例1

1. $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为 _____.

【答案】 15

【解析】 该多项式的通项 $T_{r+1} = (-1)^r \cdot C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot (x)^{-\frac{r}{2}} = (-1)^r \cdot C_6^r \cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$, 令 $6 - \frac{3}{2}r = 0$, 解得 $r = 4$, 带回通项公式中得 $T_5 = 15$.

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

2. 设二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中常数项为 A , 则 $A =$ _____.

【答案】 -10

【解析】 $C_5^2(\sqrt{x})^2\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = -10$.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

 练1

3. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$ 展开式中的常数项是 () .

A. 6

B. 4

C. -4

D. -6

【答案】 A

【解析】 因为二项式展开的通式为 $T_{r+1} = C_4^r x^{4-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r$, 当 $4-r-r=0$, 即 $r=2$ 时为常数项, 所以 $T_3 = C_4^2 x^2 \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = 6$.

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项

4. $\left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的展开式中的第四项是 _____ .

【答案】 $-\frac{160}{x}$

【解析】 $T_4 = T_{3+1} = C_6^3 2^3 \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = -\frac{160}{x}$

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

5. $(4^x - 2^{-x})^6$ ($x \in \mathbf{R}$) 展开式中的常数项是 () .

A. -20

B. -15

C. 15

D. 20

【答案】 C

【解析】 $T_{r+1} = C_6^r (4^x)^{6-r} (2^{-x})^r = C_6^r \cdot 2^{2x(6-r)} \cdot 2^{-xr} = C_6^r \cdot 2^{12x-3xr}$, 令 $12x-3xr=0$, 则 $r=4$, 所以 $T_5 = C_6^4 = 15$
故答案选C.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

6. $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项是 ().

A. 10

B. 15

C. 20

D. 30

【答案】 C

【解析】 由二项式的定理可知

$$T_{k+1} = C_6^k \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{6-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_6^k x^{3-k} 2^{2k-6}$$

当 $k=3$, 为展开式的常数项 $T_4 = C_6^3 = 20$.

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

7. $(1+x+x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 _____.

【答案】 -5

【解析】 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r C_6^r x^{6-2r}$. 令 $6-2r=0$

. 得 $r=3$, $T_4 = C_6^3 \cdot (-1)^3 = -C_6^3$; 令 $6-2r=-1$, 得 $r=\frac{7}{2}$ (舍去); 令

$6-2r=-2$, 得 $r=4$, $T_5 = C_6^4 (-1)^4 x^{-2}$.

$\therefore (1+x+x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 $1 \times (-C_6^3) + C_6^4 = -20 + 15 = -5$.

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

5. 求项的系数

例2

8. 在 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$ 的二项展开式中, x 的系数为 ().

A. 10

B. -10

C. 40

D. -40

【答案】 D

【解析】 $\because T_{r+1} = C_5^r (2x^2)^{5-r} \cdot (-x^{-1})^r = 2^{5-r} (-1)^r C_5^r x^{10-3r}$,

$\therefore 10-3r=1$, 即 $r=3$, $\therefore x$ 的系数为 -40.

【标注】 【知识点】求项的系数或二项式系数

 练2

9. 在 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, x^2 的系数为 ().
- A. $-\frac{15}{4}$ B. $\frac{15}{4}$ C. $-\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{8}$

【答案】 C

【解析】 由二项式展开式得,

$$T_{k+1} = C_6^k \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{6-k} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = (-1)^k 2^{2k-6} C_6^k x^{3-k},$$

令 $k = 1$, 则 x^2 的系数为 $(-1) \cdot 2^{2 \times 1 - 6} C_6^1 = -\frac{3}{8}$.

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

10. 二项式 $(x + y)^5$ 的展开式中, 含 $x^2 y^3$ 的项的系数是 _____. (用数字作答)

【答案】 10

【解析】 由二项式展开式的通项公式是 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} y^r$, 令 $r = 3$, 则含 $x^2 y^3$ 的项的系数是 $C_5^3 = 10$, 故的答案为10.

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

11. 若 $(1 - 2x)^7 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_7 x^7$, 则 a_2 的值是 ().
- A. 84 B. -84 C. 280 D. -280

【答案】 A

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

6. 求参数

 例3

12. 若 $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数为7, 则实数 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】含 x^4 的项为 $C_8^3 x^5 \left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = C_8^3 a^3 x^4$
 $\therefore C_8^3 a^3 = 7, \therefore a = \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

13. 已知 $(ax+1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是10, 则实数 a 的值是_____.

【答案】1

【解析】因为 $T_{r+1} = C_5^r (ax)^{5-r} \cdot 1^r$, 当 $r=2$ 时,
 取得的为该二项式展开的三次项,
 故系数为 $C_5^2 (a)^{5-2} \cdot 1^2 = 10 \Rightarrow a=1$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

练3

14. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为-10, 则 $a =$ _____.

【答案】-2

【解析】 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{10-2r} \left(\frac{a}{x}\right)^r = C_5^r x^{10-3r} a^r$,
 令 $10-3r=7$ 得 $r=1$,
 $\therefore x^7$ 的系数是 aC_5^1 ,
 $\therefore x^7$ 的系数是-10,
 $\therefore aC_5^1 = -10$, 解得 $a=-2$.
 故答案为:-2.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

15. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是80, 则实数 a 的值是().

A. -2

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt[3]{4}$

D. 2

【答案】D

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

【知识点】求二项式展开式的特定项

7. 赋值法

例4

16. 设 $(x^2 + 1)(2x + 1)^9 = a_0 + a_1(x + 2) + a_2(x + 2)^2 + \cdots + a_{11}(x + 2)^{11}$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}$ 的值为 _____ .

【答案】 -2

【解析】 令 $x = -1$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = -2$.

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

17. $(1 + 2x)^2(1 - x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, 则 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$ 等于 () .
- A. 32 B. -32 C. -33 D. -31

【答案】 D

【解析】 $(1 + 2x)^2(1 - x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, 当 $x = 0$ 时, $a_0 = 1$.当 $x = 1$ 时, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0$, ①当 $x = -1$ 时, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = 2^5$, ②①-②得, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = -16$.①+②得, $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = 16$. 所以 $a_2 + a_4 + a_6 = 15$. $\therefore a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 = -31$.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

练4

18. 已知 $(x - m)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$ 的展开式中 x^4 的系数是 -35, 则 $m =$ _____ ; $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 =$ _____ .

【答案】 1; 1

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

19. 设 $(x-2)^1 + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$, 则
 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = \underline{\hspace{2cm}}$; $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0 ; 51

【解析】 在等式 $(x-2)^1 + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 中,
 令 $x=1$, 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$,
 $a_4 = C_4^0 + C_5^1 \cdot (-2) + C_6^2 \cdot (-2)^2$
 $= 1 - 10 + 60$
 $= 51$.
 故答案为: 0 ; 51.

【标注】 【知识点】赋值问题; 二项式定理的展开式; 求项的系数或二项式系数; 求二项式展开式的特定项

8. 整除问题

例5

20. 求证: $50^{51} - 1$ 能被 7 整除.

【答案】 证明见解析.

【解析】 $50^{51} - 1 = (49 + 1)^{51} - 1$
 $= C_{51}^0 \cdot 49^{51} + C_{51}^1 \cdot 49^{50} + \cdots + C_{51}^{50} \cdot 49 + C_{51}^{51} - 1$
 $= C_{51}^0 \cdot 49^{51} + C_{51}^1 \cdot 49^{50} + \cdots + C_{51}^{50} \cdot 49$.
 显然上式中每一项均能被 7 整除,
 因此 $50^{51} - 1$ 能被 7 整除.

【标注】 【知识点】整除问题; 二项式定理的展开式

练5

21. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 且 $0 \leq a < 13$, 若 $51^{2017} + a$ 能被 13 整除, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】 $\because 51^{2017} + a = (52 - 1)^{2017} + a$
 $= C_{2017}^0 \cdot 52^{2017} - C_{2017}^1 \cdot 52^{2016} + \cdots + C_{2017}^{2016} \cdot 52^1 - 1 + a,$
能被13整除, 且 $0 \leq a < 13, a \in \mathbf{Z},$
 $\therefore -1 + a$ 能被13整除, 故 $a = 1.$

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式; 整除问题

22. 求证: $2^{4n} - 1$ 能被5整除.

【答案】 证明见解析.

【解析】 $2^{4n} - 1 = (15 + 1)^n - 1.$

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式; 整除问题

二、二项式系数性质

1. 对称性

在二项展开式中, 与首末两项“等距离”的两项的二项式系数相等.

2. 单调性

二项式系数(数列)在前半部分逐渐增大, 在后半部分逐渐减小, 在中间(项)取得最大值. 其中当 n 为偶数时, 二项展开式中间一项的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大;

当 n 为奇数时, 二项展开式中间两项的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}, C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等, 且最大.

3. 组合总数的公式

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$, 即二项展开式中各项的二项式系数之和等于 2^n .

4. “一分为二”的考察

二项展开式中各奇数项的二项式系数之和等于各偶数项的二项式系数之和,

即 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}.$



例6

23. 在 $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中, 只有第5项的二项式系数最大, 则展开式的常数项为 ().
- A. -7 B. 7 C. -28 D. 28

【答案】 B

【解析】 依题意, $\frac{n}{2} + 1 = 5$, $\therefore n = 8$. 二项式为 $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$, 其展开式的通项为

$$T_{k+1} = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{8-k} C_8^k x^{8-\frac{4k}{3}} \text{ 令 } 8 - \frac{4k}{3} = 0 \text{ 解得 } k = 6, \text{ 故常数项为}$$

$$C_8^6 \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6 = 7. \text{ 故选B}$$

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项

【知识点】 求项的系数或二项式系数

【素养】 数学运算

24. 若 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 展开式中的二项式系数和为512, 则 n 等于 ____; 该展开式中的常数项为 ____.

【答案】 9; 84

【解析】 令 $x = 1$, 由题意有 $2^n = 512$, 解得 $n = 9$;

$$T_{r+1} = C_9^r (x^2)^{9-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_9^r x^{18-3r},$$

$$\text{令 } 18 - 3r = 0, \text{ 解得 } r = 6,$$

$$\text{所以常数项为 } T_7 = C_9^6 x^0 = 84.$$

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

25. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等, 则奇数项的二项式系数和为 ().
- A. 2^{12} B. 2^{11} C. 2^{10} D. 2^9

【答案】 D

【解析】 由题意可得, 二项式的展开式满足

$$T_{r+1} = C_n^r x^r, C_n^3 = C_n^7, \text{ 因此 } n = 10.$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则 } (1+x)^n = 2^{10}, \text{ 即展开式中所有项的二项式系数和为 } 2^{10};$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 则 } (1+x)^n = 0, \text{ 即展开式中奇数项的二项式系数与偶数项的二项式系数之差为 } 0,$$

因此奇数项的二项式系数和为 $\frac{1}{2}(2^{10} + 0) = 2^9$.

故选D .

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；二项式定理的展开式

 练6

26. 若 $(x + \frac{1}{x})^n$ 展开式中第二项与第四项的系数相等, 则 $n =$ _____ ; 展开式中间一项的系数为 _____ .

【答案】 4 ; 6

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

27. $(x + \frac{2}{x^2})^5$ 的展开式中 x^2 的系数是 _____ ; 其展开式中各项系数之和为 _____ . (用数字作答)

【答案】 10 ; 243

【解析】 令 $x = 1$ 即可得各项系数之和为 $3^5 = 243$.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

28. 若 $(x^2 - \frac{1}{x})^n$ 展开式中的所有二项式系数和为 512, 则该展开式中的常数项为 () .

A. -84

B. 84

C. -36

D. 36

【答案】 B

【解析】 二项展开式的系数和为 $2^n = 512$, 所以 $n = 9$,

二项展开式为 $T_{k+1} = C_9^k (x^2)^{9-k} (-x^{-1})^k = C_9^k x^{18-2k} (-1)^k x^{-k} = C_9^k x^{18-3k} (-1)^k$,

令 $18 - 3k = 0$, 得 $k = 6$,

所以常数项为 $T_7 = C_9^6 (-1)^6 = 84$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

29. 若 $(1 + mx)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 63$, 则实数 m 的值为 () .

A. 1

B. -1

C. -3

D. 1或-3

【答案】 D

【解析】 令 $x = 0$,

$$\text{得 } a_0 = (1+0)^6 = 1. \text{ 令 } x = 1(1+m)^6 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6.$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6 = 63,$$

$$\therefore (1+m)^6 = 64 = 2^6,$$

$$\therefore m = 1 \text{ 或 } m = -3.$$

故选D.

【标注】 【知识点】二项式系数的性质

30. 若 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 展开式中的二项式系数和为64, 则 n 等于 _____, 该展开式中的常数项为 _____.

【答案】 6; 15

【解析】 由题意得 $2^n = 64$, $\therefore n = 6$, 该二项式通项为 $T_{r+1} = C_6^r (x^2)^{6-r} (\frac{1}{x})^r = C_6^r x^{12-3r}$, 所以常数项时 $r = 4$, 为 $C_6^4 = 15$.

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式