

# 二项式定理

## 一、二项式定理

### 1. 二项式定理的概念

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 这个公式表示的定理叫做二项式定理.

### 2. 二项式系数、二项式的通项

$C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$  叫做  $(a+b)^n$  的二项展开式, 其中的系数

$C_n^r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 叫做二项式系数, 式中的  $C_n^r a^{n-r} b^r$  叫做二项展开式的通项.

用  $T_{r+1}$  表示, 即通项为展开式的第  $r+1$  项:  $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ .

### 3. 二项式展开式的各项幂指数

二项式  $(a+b)^n$  的展开式项数为  $n+1$  项, 各项的幂指数状况是

(1) 各项的次数和都等于二项式的幂指数  $n$ .

(2) 字母  $a$  的按降幂排列, 从第一项开始, 次数由  $n$  逐项减1直到零, 字母  $b$  按升幂排列, 从第一项起, 次数由零逐项增1直到  $n$ .

### 4. 求指定项

#### 例1

1.  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的二项展开式中的常数项为 \_\_\_\_.

2. 设二项式  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$  的展开式中常数项为  $A$ , 则  $A =$  \_\_\_\_.

#### 练1

3.  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$  展开式中的常数项是 ( ).

A. 6

B. 4

C. -4

D. -6

4.  $\left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$  的展开式中的第四项是 \_\_\_\_.

5.  $(4^x - 2^{-x})^6$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 展开式中的常数项是 ( ).

A. -20

B. -15

C. 15

D. 20

6.  $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$  的二项展开式中, 常数项是 ( ).

A. 10

B. 15

C. 20

D. 30

7.  $(1+x+x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中的常数项为 \_\_\_\_\_.

## 5. 求项的系数

### 例2

8. 在  $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$  的二项展开式中,  $x$  的系数为 ( ).

A. 10

B. -10

C. 40

D. -40

### 练2

9. 在  $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$  的二项展开式中,  $x^2$  的系数为 ( ).

A.  $-\frac{15}{4}$ B.  $\frac{15}{4}$ C.  $-\frac{3}{8}$ D.  $\frac{3}{8}$ 

10. 二项式  $(x+y)^5$  的展开式中, 含  $x^2y^3$  的项的系数是 \_\_\_\_\_. (用数字作答)

11. 若  $(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$ , 则  $a_2$  的值是 ( ).

A. 84

B. -84

C. 280

D. -280

## 6. 求参数

### 例3

12. 若  $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$  的展开式中  $x^4$  的系数为 7, 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

13. 已知  $(ax+1)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数是 10, 则实数  $a$  的值是 \_\_\_\_\_.

### 练3

14. 设常数  $a \in \mathbf{R}$ . 若  $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$  的二项展开式中  $x^7$  项的系数为 -10, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

15. 若  $(ax-1)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数是 80, 则实数  $a$  的值是 ( ).

A. -2

B.  $2\sqrt{2}$ C.  $\sqrt[3]{4}$ 

D. 2

## 7. 赋值法

#### 例4

16. 设  $(x^2 + 1)(2x + 1)^9 = a_0 + a_1(x + 2) + a_2(x + 2)^2 + \cdots + a_{11}(x + 2)^{11}$ , 则  $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}$  的值为 \_\_\_\_\_ .
17.  $(1 + 2x)^2(1 - x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$ , 则  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$  等于 ( ) .
- A. 32                      B. -32                      C. -33                      D. -31

#### 练4

18. 已知  $(x - m)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$  的展开式中  $x^4$  的系数是 -35, 则  $m =$  \_\_\_\_\_ ;  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 =$  \_\_\_\_\_ .
19. 设  $(x - 2)^1 + (x - 2)^2 + \cdots + (x - 2)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ , 则  $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6 =$  \_\_\_\_\_ ;  $a_4 =$  \_\_\_\_\_ .

## 8. 整除问题

#### 例5

20. 求证:  $50^{51} - 1$  能被 7 整除 .

#### 练5

21. 设  $a \in \mathbf{Z}$ , 且  $0 \leq a < 13$ , 若  $51^{2017} + a$  能被 13 整除, 则  $a =$  \_\_\_\_\_ .
22. 求证:  $2^{4n} - 1$  能被 5 整除 .

## 二、二项式系数性质

### 1. 对称性

在二项展开式中, 与首末两项“等距离”的两项的二项式系数相等 .

### 2. 单调性

二项式系数 ( 数列 ) 在前半部分逐渐增大, 在后半部分逐渐减小, 在中间 ( 项 ) 取得最大值 . 其中当  $n$  为偶数时, 二项展开式中间一项的二项式系数  $C_n^{\frac{n}{2}}$  最大 ; 当  $n$  为奇数时, 二项展开式中间两项的二项式系数  $C_n^{\frac{n-1}{2}}, C_n^{\frac{n+1}{2}}$  相等, 且最大 .

### 3. 组合总数的公式

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ ，即二项展开式中各项的二项式系数之和等于 $2^n$ 。

### 4. “一分为二”的考察

二项展开式中各奇数项的二项式系数之和等于各偶数项的二项式系数之和，

即 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$ 。

#### 例6

23. 在 $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中，只有第5项的二项式系数最大，则展开式的常数项为（ ）。

- A. -7                      B. 7                      C. -28                      D. 28

24. 若 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 展开式中的二项式系数和为512，则 $n$ 等于 \_\_\_\_\_；该展开式中的常数项为 \_\_\_\_\_。

25. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为（ ）。

- A.  $2^{12}$                       B.  $2^{11}$                       C.  $2^{10}$                       D.  $2^9$

#### 练6

26. 若 $(x + \frac{1}{x})^n$ 展开式中第二项与第四项的系数相等，则 $n =$  \_\_\_\_\_；展开式中间一项的系数为 \_\_\_\_\_。

27.  $(x + \frac{2}{x^2})^5$ 的展开式中 $x^2$ 的系数是 \_\_\_\_\_；其展开式中各项系数之和为 \_\_\_\_\_。(用数字作答)

28. 若 $(x^2 - \frac{1}{x})^n$ 展开式中的所有二项式系数和为512，则该展开式中的常数项为（ ）。

- A. -84                      B. 84                      C. -36                      D. 36

29. 若 $(1+mx)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 63$ ，则实数 $m$ 的值为（ ）。

- A. 1                      B. -1                      C. -3                      D. 1或-3

30. 若 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 展开式中的二项式系数和为64，则 $n$ 等于 \_\_\_\_\_，该展开式中的常数项为 \_\_\_\_\_。