

排列问题

一、加法原理与乘法原理

1. 分类加法原理

先考虑这样一个问题：

从北京到石家庄，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘飞机。假定火车每日10班，汽车每日2班，飞机每日5班，那么一天中从北京到石家庄有多少种不同的走法呢？

我们不难得到如下结论：三种交通工具的任意一个班次都能够实现从北京到石家庄，因此，一天中不同的走法有 $10 + 2 + 5 = 17$ 种。

把上述例子推广到一般情况，就是**分类加法计数原理**。

做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法。

【补充说明】

分类加法原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事。

例1

1. 用1, 3, 5, 7中的任意一个数作分子，2, 4, 8, 9中任意一个数作分母，可构成真分数的个数为（ ）。
A. 8 B. 9 C. 10 D. 11
2. 若 a, b 是正整数，且 $a + b \leq 6$ ，则以 (a, b) 为坐标的点共有多少个？

练1

3. 用一个大写的英文字母或一个阿拉伯数字(1 ~ 10)给教室的座位编号，总共能编出（ ）种不同的号码。
A. 26 B. 10 C. 260 D. 36

2. 分步乘法原理

再考虑另一种形式的问题：

从黑龙江省大庆市到云南省昆明市，需先到北京中转，已知一天内从大庆到北京有三班火车，一班省际客车，从北京到昆明有3班火车．那么一天中从大庆到昆明有多少种不同的走法呢？

我们不难得到如下结论：从大庆到昆明需可以分成两个步骤完成：第一步到达北京，有4种走法；第二步到达昆明，有3种走法．所以一共有 $4 \times 3 = 12$ 种走法．

由上面的实例可提取出**分步乘法计数原理**．

做一件事，完成它需要分成 n 个子步骤，做第一个步骤有 m_1 种不同的方法，做第二个步骤有 m_2 种不同方法，……，做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法．

例2

4. 某人有3个电子邮箱，他要发5封不同的电子邮件，则不同的发送方法有（ ）．
- A. 8种 B. 15种 C. 3^5 种 D. 5^3 种
5. 4名同学报名参加两个课外活动小组，每名同学限报其中的一个小组，则不同的报名方法共有（ ）．
- A. 4种 B. 16种 C. 64种 D. 256种

练2

6. 某公共汽车上有10位乘客，沿途5个车站，乘客下车的可能方式有（ ）种．
- A. 5^{10} B. 10^5
C. 50 D. A_{10}^5
7. 现有6名同学去听同时进行的5个课外知识讲座，每名同学可自由选择其中的一个讲座，不同选法的种数是（ ）．
- A. 5^6
B. 6^5
C. $\frac{5 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2}$
D. $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

3. 两类计数原理综合

解决有些计数问题时需要兼顾两种基本计数原理，此时要结合题目内容仔细分析“分类”与“分步”的顺序，而且，在具体的“分类”和“分步”的过程中，要明确“分类”的标准和“分步”的步骤．对于更复杂的一类问题，甚至会出现“分类中有分步，分步中有分类”的情况．

例3

8. 有不同的数学书11本，不同的物理书8本，不同的化学书5本，从中取出不同学科的书2本，有多少种不同的取法？

练3

9. 在“志愿和平”活动中，某校高二年级3名男教师和4名女教师参与社区防控新冠肺炎疫情的志愿服务。根据岗位需求应派3人巡视商户，且至少有1名男教师；另外4人测量出入人员体温。则这7名教师不同的安排方法有（ ）。
- A. 15种 B. 18种 C. 31种 D. 45种

二、排列定义与排列数计算

1. 排列定义

一般地，从 n 个不同的元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一行，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

【补充说明】

- (1) 排列的定义实际上包含两层内容：一是“取出元素”，二是“排列顺序”；
- (2) 只有元素完全相同，而且顺序也完全一致，二者才算是同一种排列；
- (3) 判断一个问题是否是排列问题的关键就是检验顺序对问题的结果是否有影响。例如，从3、5、7、10、13中任取两个数相加（相乘），可以得到多少个不同的和（积），由于加法（乘法）满足交换律，故最终结果与选取两个元素的顺序无关，因此这个问题就不属于排列问题。而从上述五个数中选取两个数进行相减（相除），就属于排列问题；

例1

10. 8名学生站成两排，前排3人，后排5人，则不同的站法共有（ ）。
- A. A_8^8 种
B. $(A_8^5 + A_3^3)$ 种
C. $(A_5^5 + A_3^3)$ 种
D. $\frac{1}{2}A_8^8$ 种

2. 排列数及其计算

排列数

从 n 个不同的元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示。

排列数公式

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1), m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } m \leq n.$$

【提问】请同学们根据分步乘法计数原理证明上面的排列数公式。

全排列

一般地， n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列。

$$\text{全排列公式 } A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

阶乘

正整数由1到 n 的连乘积，叫作 n 的阶乘，用 $n!$ 表示。所以 n 个不同元素的全排列公式可以写成 $A_n^n = n!$ 。

规定： $0! = 1$ 。

借助于阶乘的定义，可以将排列数公式改写成 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ，请同学们自行证明。

例2

11. $5A_5^3 + 4A_4^2 = (\quad)$.

A. 107

B. 323

C. 320

D. 348

12. 已知 $A_{n+1}^2 - A_n^2 = 10$ ，则 n 的值为()。

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

练1

13. 已知 $\frac{A_n^7 - A_n^5}{A_n^5} = 89$ ，则 n 的值为_____。

14. 计算 $\frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_9^5 - A_8^5}$ 。

练2

15. 3个学生在4本不同的参考书中各挑选1本，不同的选法种数为()。

A. 3

B. 24

C. 34

D. 43

16. 用0, 1, 2, 3, 4, 5这六个数字：

- (1) 可以组成多少个数字允许重复的六位数？
- (2) 可以组成多少个数字不允许重复的六位数？
- (3) 可以组成多少个数字允许重复的五位数？
- (4) 可以组成多少个数字不允许重复的五位数？

三、 常见排列问题

1. 元素 (位置) 优先法

含有特殊元素或特殊位置，通常优先安排特殊元素或特殊位置。

例1

17. 用数字1, 2, 3, 4, 5组成的无重复数字的四位偶数的个数为 _____ .
18. 上午要上语文、数学、体育和外语四门功课，而体育教师因故不能上第一节和第四节课，则不同排课方案的种数是 () .
- A. 24 B. 22 C. 20 D. 12

练1

19. 将A, B, C, D, E, F六个字母排成一排，且A, B均在C的同侧，则不同的排法共有 _____ 种 (用数字作答) .
20. 社区主任要为小红等4名志愿者和他们帮助的2位老人拍照，要求排成一排，小红必须与2位老人都相邻，且两位老人不排在两端，则不同的排法种数是 _____ . (用数字作答)

2. 相邻排列问题 (捆绑法)

- (1) 模型：将 n 个不同元素排成一排，其中某 k 个元素相邻，求不同排法种数的方法 .
- (2) 思路：将相邻的 k 个元素“捆绑”在一起看成一个整体，此时变为 $n - k + 1$ 个元素的全排列，排法为 A_{n-k+1}^{n-k+1} ；再将“捆绑”在一起的元素内部排列，排法为 A_k^k . 根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数有 $A_{n-k+1}^{n-k+1} \cdot A_k^k$ 种 .

例2

21. 6名同学排成一排，其中甲、乙两人必须排在一起的不同排法是 () .
- A. 720种 B. 360种 C. 240种 D. 120种

22.

停车场划出一排12个停车位置，今有8辆不同的车需要停放，若要求剩余的4个空车位连在一起，则不同的停车方法有（ ）.

- A. A_{12}^8 种
- B. $2A_8^8A_4^4$ 种
- C. $8A_8^8$ 种
- D. $9A_8^8$ 种

 练2

23. 在制作飞机的某一零件时，要先后实施6个工序，其中工序A只能出现在第一步或最后一步，工序B和C在实施时必须相邻，则实施顺序的排列方法共有（ ）.

- A. 34种 B. 48种 C. 96种 D. 144种

3. 间隔排列问题（插空法）

(1) 模型：将 n 个不同的元素排成一排，其中某 k 个元素互不相邻 ($k \leq n - k + 1$)，求不同排法种数的方法。

(2) 思路: ①将没有要求的 $n-k$ 个元素全排列, 排列方法有 A_{n-k}^{n-k} 种; ②将要求互不相邻的 k 个元素插入 $n-k+1$ 个空隙中, 相当于从 $n-k+1$ 个空隙中选取 k 个分配给互不相邻的那 k 个元素, 其排列方法有 A_{n-k+1}^k 种. 根据分步乘法计数原理, 符合条件的排法种数有 $A_{n-k}^{n-k} \cdot A_{n-k+1}^k$ 种.

 例3

24. 在某校召开的高考总结表彰会上有**3**位数学老师、**2**位英语老师和**1**位语文老师做典型发言．现在安排这**6**位老师的发言顺序，则**3**位数学老师互不相邻的排法共有_____种．（请用数字作答）

 练3

25. 高三（一）班需要安排毕业晚会的4个音乐节目，2个舞蹈节目和1个曲艺节目的演出顺序，要求两个舞蹈节目不连排，则不同排法的种数是（ ）.

- A. 1800 B. 3600 C. 4320 D. 5040

26. 将7个座位连成一排, 安排4个人就座, 恰有两个空位相邻的不同坐法有().

- A. 240 B. 480 C. 720 D. 960

4. 某些元素顺序确定的排列问题（除序法）

在有些排列问题中，某些元素的前后顺序是固定的（但是不一定相邻），具体如下：

(1) 模型：将 $m+n$ 个不同的元素排成一排，其中 m 个元素之间的顺序固定不变，求不同的排法种数的方法。

(2) 思路：

①整体法：先将 $m+n$ 个元素全排列，共有 A_{m+n}^{m+n} 种排列方法．然后任取一种排列，固定另外 n 个元素的位置不动，将 m 个元素交换顺序，共有 A_m^m 种排列方法，而其中只有一种排列是我们所需要的，因此共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种不同的排列方法．

②插空法：先从 $m+n$ 个位置选出 n 个进行排列，然后将顺序固定的 m 个元素插入相应空当中，所以排列种数为 $A_{m+n}^n \times 1 = A_{m+n}^n$ 种．

例4

27. A 、 B 、 C 、 D 、 E 五人站成一排，如果 A 必须站在 B 的左边（ A 、 B 可以不相邻），则不同的排法有（ ）．

A. 24种

B. 60种

C. 90种

D. 120种

练4

28. 八个人排一纵队，甲在乙的前面（可以与乙不相邻），乙在丙的前面（可以与丙不相邻），则这样的排列共有 _____ 种．

5. 间接化处理问题（正难则反）

对于给定附加条件的问题，正面考虑情况较为复杂时，可以考察否定附加条件下问题的情况，然后从无条件中排除上述情况即可．

例5

29. 7个人排一排，甲不在排头、乙不在排尾的排法有 _____ 种．

练5

30. 从5名学生中任选4名分别参加数学、物理、化学、生物四科竞赛，且每科竞赛只有1人参加，若甲不参加生物竞赛，则不同的选择方案共有 _____ 种．

31. 某单位安排7位员工在10月1日至7日值班，每天安排1人，每人值班1天，若7位员工中的甲、乙排在相邻两天，丙不排在10月1日，丁不排在10月7日，则不同的安排方案共有（ ）．

A. 504种

B. 960种

C. 1008种

D. 1108种

6. 错位排列问题

（1）模型：将编号为 $1 \sim n$ 的 n 个小球放入编号为 $1 \sim n$ 的 n 个盒子中，规定 i 号小球不许放入 i 号盒子，求不同的放法种数，此种排列称为全错位排列，相应的排列数称为全错位排列数．

(2) 当 $n = 2, 3, 4, 5$ 时的全错位排列数各为 $1, 2, 9, 44$. 关于 5、6、7 个元素的错位排列的计算, 可以用剔除法转化为 2 个、3 个、4 个元素的错位排列的问题.

例6

32. 编号为 $1 - 4$ 的 4 个小球放入编号为 $1 - 4$ 的 4 个盒子内, 要求小球与盒子的编号不同, 共有多少种方法?

练6

33. 将编号为 $1, 2, 3, 4$ 的小球放入编号为 $1, 2, 3$ 的盒子中, 要求不允许有空盒子, 且球与盒子的号不能相同, 则不同的放球方法有 ().

- A. 16 种 B. 12 种 C. 9 种 D. 6 种

7. 综合拓展

34. 书架上原来摆放着 6 本不同的书, 现要再放 3 本不同的书, 则不同放法的种数为 ().

- A. A_7^3 B. A_4^4
C. $9 \times 8 \times 7$ D. $2A_3^3$

35. 5 个男生 5 个女生共 10 个同学排成一排, 男生甲与男生乙之间有且只有 2 位女生, 女生不能排在队伍的两端, 则共有 _____ 种排法.

36. 六个人从左至右排成一行, 最左端只能排甲或乙, 最右端不能排甲, 则不同的排法共有 ().

- A. 192 种 B. 216 种 C. 240 种 D. 288 种

37. 加工某种产品需要 A, B, C, D, E 五道工艺, 其中 A 必须在 D 的前面完成 (不一定相邻), 其他工艺的顺序可以改变, 但不能同时进行. 为了节省加工时间, B 与 C 必须相邻, 那么完成加工该产品的不同工艺的排列顺序有 _____ 种.