

恒成立与能成立综合问题练习题

1. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4x} - 1$, $g(x) = x^2 - 2bx + 4$, 若对任意 $x_1 \in (0, 2)$, 当 $x_2 \in [1, 2]$ 时, $f(x_1) \geq g(x_2)$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

【答案】 $[\frac{11}{4}, +\infty)$.

【解析】 $f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4x} - 1$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4x^2} = -\frac{(x-1)(x-3)}{4x^2}$
 故函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, 2)$ 上单调递增
 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 的最小值为 $f(1) = -\frac{1}{2}$
 若对任意 $x_1 \in (0, 2)$, 当 $x_2 \in [1, 2]$ 时, $f(x_1) \geq g(x_2)$ 恒成立,
 只需当 $x \in [1, 2]$ 时, $g_{\max}(x) \leq -\frac{1}{2}$ 即可所以 $\begin{cases} g(1) \leq -\frac{1}{2} \\ g(2) \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$, 代入解得 $b \geq \frac{11}{4}$
 所以实数 b 的取值范围是 $[\frac{11}{4}, +\infty)$.

【标注】 【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题

2. 已知 $x \in [0, 1]$, 函数 $f(x) = x^2 - \ln(x + \frac{1}{2})$, $g(x) = x^3 - 3a^2x - 4a$, 设 $a \leq -1$, 若 $\forall x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 $a \leq -\frac{3}{2}$.

【解析】 $f'(x) = 2x - \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$, 令 $f'(x) = 0$ 解得: $x = \frac{1}{2}, x = -1$ (舍去)

列表:

x	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$1 - \ln \frac{3}{2}$

可知 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0, \frac{1}{2})$, 增区间是 $(\frac{1}{2}, 1)$;

因为 $\frac{1}{4} < 1 - \ln \frac{3}{2} = \ln 2 - (\ln 3 - 1) < \ln 2$,

所以当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{4}, \ln 2]$

$g'(x) = 3(x^2 - a^2)$ 因为 $a \leq -1$, $x \in (0, 1)$, 所以 $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的减函数, $g(1) \leq g(x) \leq g(0)$ 所以 $g(x) \in [1 - 4a - 3a^2, -4a]$

因为当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{4}, \ln 2\right]$.

由题意知: $\left[\frac{1}{4}, \ln 2\right] \subseteq [1 - 4a - 3a^2, -4a]$

所以 $\begin{cases} 1 - 4a - 3a^2 \leq \frac{1}{4}, \text{ 又 } a \leq -1, \text{ 得 } a \leq -\frac{3}{2}. \\ -4a \geq \ln 2 \end{cases}$.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立与能成立综合问题

3. 已知 $f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 3} (x \in (0, 2))$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x - a$.

(1) 求 $f(x)$ 的值域.

(2) 若 $\exists x \in [1, 2]$, 使得 $g(x) = 0$, 求 a 的取值范围.

(3) 对 $\forall x_1 \in (0, 2)$, 总存在 $x_2 \in [1, 2]$ 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x) \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$.

(2) $a \in \left(\frac{1}{2}, 2 - \ln 2\right)$.

(3) $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3} - \ln 2\right]$.

【解析】 (1) $f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $x + \frac{1}{x} \in [2, +\infty)$, 故 $f(x) \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$.

(2) 原问题等价于方程 $\frac{1}{2}x^2 - \ln x = a (x \in [1, 2])$ 有解.

令 $\mu(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, 则 $\mu'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$, 故 $\mu(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增.

$\therefore \mu(1) = \frac{1}{2}$, $\mu(2) = 2 - \ln 2$.

$\therefore \mu(x) \in \left(\frac{1}{2}, 2 - \ln 2\right)$, 故 $a \in \left(\frac{1}{2}, 2 - \ln 2\right)$.

(3) 令 $A = \{y | y = f(x), x \in (0, 2)\}$, $B = \{y | y = g(x), x \in [1, 2]\}$,

则原问题等价于 $A \subseteq B$.

由 (1) (2) 可知 $A = \left(0, \frac{2}{3}\right]$, $B = \left(\frac{1}{2} - a, 2 - \ln 2 - a\right)$.

$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} - a \leq 0 \\ \frac{2}{3} \leq 2 - \ln 2 - a \end{cases}$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{4}{3} - \ln 2$.

$\therefore a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3} - \ln 2\right]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题; 等式的能成立或恒成立问题