

恒成立与能成立综合问题

一、恒成立与能成立综合问题

1. 题型一

① $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

① $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > g(x)_{\min}$

例1

1. 已知函数： $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x} (a < 1)$ ， $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + e^x - xe^x$ ，若存在 $x_1 \in [e, e^2]$ ，使得对任意的 $x_2 \in [-2, 0]$ ， $f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立，求 a 的取值范围。

【答案】 $a \in (\frac{e^2 - 2e}{e + 1}, 1)$ 。

【解析】 若存在 $x_1 \in [e, e^2]$ ，使得对任意的 $x_2 \in [-2, 0]$ ， $f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立，

即 $f(x_1)_{\min} < g(x_2)_{\min}$

$f'(x) = \frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$ ，当 $a < 1$ 时， $x \in [e, e^2]$ ， $f'(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 在 $[e, e^2]$ 为增函数，

$$\therefore f(x_1)_{\min} = f(e) = e - (a+1) - \frac{a}{e},$$

$$g'(x) = x + e^x - xe^x - e^x = x(1 - e^x),$$

当 $x_2 \in [-2, 0]$ 时 $g'(x) \leq 0$ ， $g(x)$ 为减函数， $g(x_2)_{\min} = g(0) = 1$ ，

$$\therefore e - (a+1) - \frac{a}{e} < 1, a > \frac{e^2 - 2e}{e + 1} \therefore a \in (\frac{e^2 - 2e}{e + 1}, 1) \text{即为所求}.$$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题

2. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in \mathbf{R})$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间。

(2) 设 $g(x) = x^2 - 2x + 2$ ，若对任意 $x_1 \in (0, +\infty)$ ，均存在 $x_2 \in [0, 1]$ ，使得 $f(x_1) < g(x_2)$ ，求实数 a 的取值范围。

【答案】 (1) $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 。

$$(2) a < -\frac{1}{e^3}.$$

【解析】(1) $f'(x) = a + \frac{1}{x}, x > 0$

当 $a \geq 0$ 时, 由于 $x \in (0, +\infty), f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$,

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 变化情况如下表:

x	$\left(0, -\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$, 函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$.

(2) 由已知, 转化为 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$

因为 $g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1, x \in [0, 1]$,

所以 $g(x)_{\max} = 2$

由 (I) 知, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 值域为 $\mathbf{R}$, 故不符合题意.

(或者举出反例: 存在 $f(e^3) = ae^3 + 3 > 2$, 故不符合题意.)

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 的极大值即为最大值, $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right) = -1 - \ln(-a)$,

所以 $2 > -1 - \ln(-a)$, 解得 $a < -\frac{1}{e^3}$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题

练1

2. 题型二

② $\exists x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

② $\exists x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > g(x)_{\max}$

例2

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x, (a \in \mathbf{R})$.

设 $g(x) = x^2 - 2x$, 若对任意 $x_1 \in (0, 2]$, 均存在 $x_2 \in (0, 2]$, 使得 $f(x_1) < g(x_2)$, 求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $a > \ln 2 - 1$.

【解析】 (1) 由已知 , 在 $(0, 2]$ 上有 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$.

由已知 , $g(x)_{\max} = 0$, 由 (2) 可知 ,

① 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时 , $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增 ,

故 $f(x)_{\max} = f(2) = 2a - 2(2a + 1) + 2 \ln 2 = -2a - 2 + 2 \ln 2$,

所以 , $-2a - 2 + 2 \ln 2 < 0$, 解得 $a > \ln 2 - 1$, 故 $\ln 2 - 1 < a \leq \frac{1}{2}$.

② 当 $a > \frac{1}{2}$ 时 , $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增 , 在 $[\frac{1}{a}, 2]$ 上单调递减 ,

故 $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = -2 - \frac{1}{2a} - 2 \ln a$.

由 $a > \frac{1}{2}$ 可知 $\ln a > \ln \frac{1}{2} > \ln \frac{1}{e} = -1$, $2 \ln a > -2$, $-2 \ln a < 2$,

所以 , $-2 - 2 \ln a < 0$, $f(x)_{\max} < 0$,

综上所述 , $a > \ln 2 - 1$.

【标注】 【知识点】 利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题

练2

4. 设函数 $f(x) = (x^2 + ax - a) \cdot e^{-x} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 0$ 时 , 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程 .

(2) 设 $g(x) = x^2 - x - 1$, 若对任意的 $t \in [0, 2]$, 存在 $s \in [0, 2]$ 使得 $f(s) \geq g(t)$ 成立 , 求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $y = -3ex - 2e$.

(2) $a \geq e^2 - 4$ 或 $a \leq -1$.

【解析】 (1) $a = 0$ 时 , $f'(x) = (-x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$,

$f(-1) = e$, $f'(-1) = -3e$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $y = -3ex - 2e$.

(2) 依题即 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值 $f(x)_{\max}$ 大于或等于 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值 $g(x)_{\max}$.

$g(x) = x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 $g(2) = 1$,

$f'(x) = [-x^2 + (2 - a)x + 2a] \cdot e^{-x} = (-x + 2)(x + a) \cdot e^{-x}$,

解 $f'(x) = 0$ 得 $x = -a$ 或 $x = 2$,

① 当 $-a \leq 0$, 即 $a \geq 0$ 时,

$f'(x) \geq 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上恒成立, 故 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{(4+a)}{e^2} \geq 1$,

解得 $a \geq e^2 - 4$;

② 当 $-a \geq 2$, 即 $a \leq -2$ 时

$f'(x) \leq 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上恒成立, 故 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f(0) = -a \geq 1$,

解得 $a \leq -1$,

故 $a \leq -2$ 满足条件;

③ 当 $0 < -a < 2$, 即 $-2 < a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$ 得 $-a < x < 2$; 由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < -a$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, 2)$ 上单调递增,

故 $f(0) \geq 1$ 或 $f(2) \geq 1$,

所以 $-2 < a \leq -1$ 满足条件,

综合①②③得 $a \geq e^2 - 4$ 或 $a \leq -1$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题

3. 题型三

③ $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

③ $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)_{\max} \leq g(x)_{\max} \\ f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min} \end{cases}$

例3

5. 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;

(2) 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a$, $x \in [0, 1]$, 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $f(x)$ 为减函数; 当 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $f(x)$ 是增函数;

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-4, -3]$.

(2) a 的取值范围为 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$.

【解析】(1) 对函数 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x) = \frac{-4x^2 + 16x - 7}{(2-x)^2} = -\frac{(2x-1)(2x-7)}{(2-x)^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{7}{2}$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 、 $f(x)$ 的变化情况如下:

x	0	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$-\frac{7}{2}$	$\searrow$	极小值 -4	$\nearrow$	-3

所以, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 为减函数; 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $f(x)$ 是增函数;

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-4, -3]$.

(2) 对函数 $g(x)$ 求导, 得 $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$.

因为 $a \geq 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 3(1 - a^2) \leq 0$.

因此当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x)$ 为减函数, 从而当 $x \in [0, 1]$ 时有 $g(x) \in [g(1), g(0)]$.

又 $g(1) = 1 - 2a - 3a^2$, $g(0) = -2a$, 即当 $x \in [0, 1]$ 时有 $g(x) \in [1 - 2a - 3a^2, -2a]$.

任给 $x_1 \in [0, 1]$, $f(x_1) \in [-4, -3]$, 存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使得 $g(x_0) = f(x_1)$,

则 $[1 - 2a - 3a^2, -2a] \supseteq [-4, -3]$, 即 $\begin{cases} 1 - 2a - 3a^2 \leq -4 \\ -2a \geq -3 \end{cases}$

解式①得 $a \geq 1$ 或 $a \leq -\frac{5}{3}$; 解式②得 $a \leq \frac{3}{2}$. 又 $a \geq 1$,

故 a 的取值范围为 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性 (不含参); 直接求函数的最值 (不含参); 等式的能成立或恒成立问题

练3

6. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x$, $x \in (1, e)$, 且 $f(x)$ 有极值.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(3) 函数 $g(x) = x^3 - x - 2$, 证明: $\forall x_1 \in (1, e)$, $\exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立.

【答案】(1) $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.

(2) 当 $-1 < a \leq \frac{1}{1-e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$
 当 $\frac{1}{1-e} < a < -\frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 由 $f(x) = ax + \ln x$ 求导可得 $f'(x) = a + \frac{1}{x}$,

令 $f'(x) = a + \frac{1}{x} = 0$, 可得 $a = -\frac{1}{x}$.

$\because x \in (1, e)$, $\therefore -\frac{1}{x} \in \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$, $\therefore a \in \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$

又因为 $x \in (1, e)$

x	$\left(1, -\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a}, e\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以, $f(x)$ 有极值, 实数 a 的取值范围为 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.

(2) 由(1)可知 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)$.

又 $\because f(1) = a$, $f(e) = ae + 1$,

由 $a \geq ae + 1$, 解得 $a \leq \frac{1}{1-e}$, 又 $\because -1 < \frac{1}{1-e} < -\frac{1}{e}$

$\therefore$ 当 $-1 < a \leq \frac{1}{1-e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$

当 $\frac{1}{1-e} < a < -\frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$.

(3) 由 $g(x) = x^3 - x - 2$ 求导可得 $g'(x) = 3x^2 - 1$.

令 $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$, 解得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

令 $g'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, 解得 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $\because x \in (1, e) \subseteq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, e)$ 上为单调递增函数.

$\because g(1) = -2$, $g(e) = e^3 - e - 2$,

$\therefore g(x)$ 在 $x \in (1, e)$ 的值域为 $(-2, e^3 - e - 2)$.

$\because e^3 - e - 2 > -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)$, $ae + 1 > -2a > -2$,

$\therefore (ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)) \subseteq (-2, e^3 - e - 2)$, $(a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)) \subseteq (-2, e^3 - e - 2)$.

$\therefore \forall x_1 \in (1, e)$, $\exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立.

【标注】【知识点】导数与单调性

4. 非常规题型

7. 已知 $f(x) = 2\ln(x+2) - (x+1)^2$, $g(x) = k(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k = 2$ 时, 求证: 对于 $\forall x > -1$, $f(x) < g(x)$ 恒成立;

(3) 若存在 $x_0 > -1$, 使得当 $x \in (-1, x_0)$ 时, 恒有 $f(x) > g(x)$ 成立, 试求 k 的取值范围.

【答案】 (1) 单调增区间为 $(-2, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$, 单调减区间为 $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

(2) 证明见解析.

(3) $(-\infty, 2)$.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{2}{x+2} - 2(x+1) = \frac{-2(x^2+3x+1)}{x+2} \quad (x > -2)$,

当 $f'(x) > 0$ 时,

所以 $x^2 + 3x + 1 < 0$.

解得 $-2 < x < \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

当 $f'(x) > 0$ 时, 解得 $x > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

所以 $f(x)$ 单调增区间为 $(-2, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$, 单调减区间为 $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

(2) 设 $h(x) = f(x) - g(x) = 2\ln(x+2) - (x+1)^2 - k(x+1) \quad (x > -1)$,

当 $k = 2$ 时, 由题意, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$ 恒成立.

$h'(x) = \frac{-2(x^2+3x+1)}{x+2} - 2 = \frac{-2(x+3)(x+1)}{x+2}$,

$\therefore$ 当 $x > -1$ 时, $h'(x) < 0$ 恒成立, $h(x)$ 单调递减.

又 $h(-1) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $h(x) < h(-1) = 0$ 恒成立, 即 $f(x) - g(x) < 0$.

$\therefore$ 对于 $\forall x > -1$, $f(x) < g(x)$ 恒成立.

(3) 因为 $h'(x) = \frac{-2(x^2+3x+1)}{x+2} - k = -\frac{2x^2+(k+6)x+2k+2}{x+2}$.

由 (II) 知, 当 $k = 2$ 时, $f(x) < g(x)$ 恒成立,

即对于 $\forall x > -1$, $2\ln(x+2) - (x+1)^2 < 2(x+1)$, 不存在满足条件的 x_0 ;

当 $k > 2$ 时, 对于 $\forall x > -1$, $x+1 > 0$, 此时 $2(x+1) < k(x+1)$.

$\therefore 2\ln(x+2) - (x+1)^2 < 2(x+1) < k(x+1)$, 即 $f(x) < g(x)$ 恒成立,

不存在满足条件的 x_0 ;

当 $k < 2$ 时, 令 $t(x) = -2x^2 - (k+6)x - (2k+2)$, 可知 $t(x)$ 与 $h'(x)$ 符号相同,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $t(x) < 0$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

$\therefore$ 当 $x \in (-1, x_0)$ 时, $h(x) > h(-1) = 0$, 即 $f(x) - g(x) > 0$ 恒成立.

综上, k 的取值范围为 $(-\infty, 2)$.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式; 利用导数求函数的单调性、单调区间

再来默写一遍试试看~

① $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

② $\exists x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

③ $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

① $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > g(x)_{\min}$

② $\exists x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > g(x)_{\max}$

③ $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)_{\max} \leq g(x)_{\max} \\ f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min} \end{cases}$