

恒成立与能成立综合问题

一、恒成立与能成立综合问题

1. 题型一

① $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

例1

1. 已知函数： $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x} (a < 1)$ ， $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + e^x - xe^x$ ，若存在 $x_1 \in [e, e^2]$ ，使得对任意的 $x_2 \in [-2, 0]$ ， $f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立，求 a 的取值范围。
2. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in \mathbf{R})$ 。
 - (1) 求 $f(x)$ 的单调区间。
 - (2) 设 $g(x) = x^2 - 2x + 2$ ，若对任意 $x_1 \in (0, +\infty)$ ，均存在 $x_2 \in [0, 1]$ ，使得 $f(x_1) < g(x_2)$ ，求实数 a 的取值范围。

练1

2. 题型二

② $\exists x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

例2

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x, (a \in \mathbf{R})$ 。
设 $g(x) = x^2 - 2x$ ，若对任意 $x_1 \in (0, 2]$ ，均存在 $x_2 \in (0, 2]$ ，使得 $f(x_1) < g(x_2)$ ，求 a 的取值范围。

练2

4. 设函数 $f(x) = (x^2 + ax - a) \cdot e^{-x} (a \in \mathbf{R})$ 。
 - (1) 当 $a = 0$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程。
 - (2) 设 $g(x) = x^2 - x - 1$ ，若对任意的 $t \in [0, 2]$ ，存在 $s \in [0, 2]$ 使得 $f(s) \geq g(t)$ 成立，求 a 的取值范围。

3. 题型三

③ $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

 例3

5. 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}, x \in [0, 1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;

(2) 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a, x \in [0, 1]$, 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

 练3

6. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x, x \in (1, e)$, 且 $f(x)$ 有极值.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(3) 函数 $g(x) = x^3 - x - 2$, 证明: $\forall x_1 \in (1, e), \exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立.

4. 非常规题型

7. 已知 $f(x) = 2\ln(x+2) - (x+1)^2, g(x) = k(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k = 2$ 时, 求证: 对于 $\forall x > -1, f(x) < g(x)$ 恒成立;

(3) 若存在 $x_0 > -1$, 使得当 $x \in (-1, x_0)$ 时, 恒有 $f(x) > g(x)$ 成立, 试求 k 的取值范围.

再来默写一遍试试看~

① $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

② $\exists x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

③ $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____