

恒成立问题与能成立问题练习题

一、恒成立问题

1. 已知函数 $f(x) = (x + a)e^x$, 其中 a 为常数 .
 - (1) 若函数 $f(x)$ 是区间 $[-3, +\infty)$ 上的增函数 , 求实数 a 的取值范围 ;
 - (2) 若 $f(x) \geq e^2$ 在 $x \in [0, 2]$ 时恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .
2. 已知 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$.
 - (1) 当 $a > 0$ 时 , 判断 $f(x)$ 在定义域上的单调性 .
 - (2) 若 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值为 $\frac{3}{2}$, 求 a 的值 .
 - (3) 若 $f(x) < x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立 , 试求 a 的取值范围 .
3. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 1} + 2a$, $g(x) = a \ln x - x + a$, 求证 : 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > g(x_2)$.

二、能成立问题

4. 已知函数 $f(x) = ax - (2a + 1) \ln x - \frac{2}{x}$, $g(x) = -2a \ln x - \frac{2}{x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.
 - (1) 当 $a = 2$ 时 , 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 ;
 - (2) 当 $a > 0$ 时 , 求 $f(x)$ 的单调区间 ;
 - (3) 若存在 $x \in [\frac{1}{e}, e^2]$, 使得不等式 $f(x) \geq g(x)$ 成立 , 求 a 的取值范围 .
5. 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, $g(x) = -\frac{1+a}{x}$, 若在 $[1, e]$ ($e = 2.718 \dots$) 上存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立 , 求 a 的取值范围 .