

恒成立问题与能成立问题

一、恒成立问题

1. 函数与常数比较大小的恒成立问题

$\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____

$\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

【教师备注】

$\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > k$.

$\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < k$.

例1

1. 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in R$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 ;

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 都有 $f(x) > 0$ 成立, 求 a 的取值范围 .

【答案】(1) 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, -a)$, 单调递增区间为 $(-a, +\infty)$.

(2) $a > -\frac{2}{\ln 2}$

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$. $f'(x) = 1 + \frac{a}{x} = \frac{x+a}{x}$.

① 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ;

② 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -a$.

当 $0 < x < -a$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 为减函数 ;

当 $x > -a$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 为增函数 .

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, -a)$, 单调递增区间为 $(-a, +\infty)$.

(2) 由 (2) 可知,

① 当 $-a \leq 1$ 时, 即 $a \geq -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上为增函数,

所以在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x)_{\min} = f(1) = 1$, 显然函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上恒大于零;

②当 $1 < -a < 2$ 时, 即 $-2 < a < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, -a]$ 上为减函数, 在 $(-a, 2]$

上为增函数, 所以 $f(x)_{\min} = f(-a) = -a + a \ln(-a)$.

依题意有 $f(x)_{\min} = -a + a \ln(-a) > 0$, 解得 $a > -e$, 所以 $-2 < a < -1$.

③当 $-a \geq 2$ 时, 即 $a \leq -2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上为减函数,

所以 $f(x)_{\min} = f(2) = 2 + a \ln 2$. 依题意有 $f(x)_{\min} = 2 + a \ln 2 > 0$, 解得

$a > -\frac{2}{\ln 2}$, 所以 $-\frac{2}{\ln 2} < a \leq -2$.

综上所述, 当 $a > -\frac{2}{\ln 2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上恒大于零.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参一次型导函数); 利用导数解决不等式恒成立问题

练1

2. 已知函数 $f(x) = (x^2 - x - \frac{1}{a})e^{ax}$ ($a > 0$), 若不等式 $f(x) + \frac{5}{a} \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 $0 < a \leq \ln 5$.

【解析】 令 $f'(x) = 0$, 即 $(ax + 2)(x - 1) = 0$, 解得 $x = -\frac{2}{a}$ 或 $x = 1$

当 $a > 0$ 时, 列表得:

x	$(-\infty, -\frac{2}{a})$	$-\frac{2}{a}$	$(-\frac{2}{a}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

对于 $x < -\frac{2}{a}$ 时, 因为 $x^2 > 0, -x > \frac{2}{a}, a > 0$, 所以 $x^2 - x - \frac{1}{a} > 0$,

$\therefore f(x) > 0$

对于 $x \geq -\frac{2}{a}$ 时, 由表可知函数在 $x = 1$ 时取得最小值 $f(1) = -\frac{1}{a}e^a < 0$

所以, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = -\frac{1}{a}e^a$, 由题意, 不等式 $f(x) + \frac{5}{a} \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

所以得 $-\frac{1}{a}e^a + \frac{5}{a} \geq 0$, 解得 $0 < a \leq \ln 5$.

【标注】【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

【思想】分类讨论思想

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

【知识点】导数与极值

【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题

【知识点】利用导数求函数的最值

【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

2. 同自变量的不同函数比较大小的恒成立问题

$\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

$\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

【教师备注】

$\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} > 0$.

$\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} < 0$.

例2

3. 已知函数 $f(x) = (1+x)e^{-2x}$, $g(x) = ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x \cos x$, 当 $x \in [0, 1]$ 时,
- (1) 求证: $1 - x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$.
- (2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$.

【解析】(1) 要证 $x \in [0, 1]$ 时, $(1+x)e^{-2x} \geq 1-x$, 只需证明 $(1+x)e^{-x} \geq (1-x)e^x$.

记 $h(x) = (1+x)e^{-x} - (1-x)e^x$, 则 $h'(x) = x(e^x - e^{-x})$, 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$h'(x) > 0$,

因此 $h(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上是增函数, 故 $h(x) \geq h(0) = 0$.

所以 $f(x) \geq 1-x, x \in [0, 1]$.

要证 $x \in [0, 1]$ 时, $1+x e^{-2x} \leq \frac{1}{1+x}$, 只需证明 $e^x \geq x+1$.

记 $K(x) = e^x - x - 1$, 则 $K'(x) = e^x - 1$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $K'(x) > 0$,

因此 $K(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上是增函数, 故 $K(x) \geq K(0) = 0$.

所以 $f(x) \leq \frac{1}{x+1}, x \in [0, 1]$.

综上, $1-x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$, $x \in [0, 1]$.

$$(2) f(x) - g(x) = (1+x)e^{-2x} - \left(ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x \cos x\right)$$

$$\geq 1-x-ax-1-\frac{x^3}{2}-2x \cos x$$

$$= -x \left(a+1+\frac{x^2}{2}+2 \cos x\right),$$

$$\text{设 } G(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \cos x, \text{ 则 } G'(x) = x - 2 \sin x.$$

$$\text{记 } H(x) = x - 2 \sin x, \text{ 则 } H'(x) = 1 - 2 \cos x,$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $H'(x) < 0$,

于是 $G(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上是减函数,

从而当 $x \in (0, 1)$ 时, $G'(x) < G'(0) = 0$, 故 $G(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是减数,

于是 $G(x) \leq G(0) = 2$, 从而 $a+1+G(x) \leq a+3$.

所以, 当 $a \leq -3$ 时, $f(x) \geq g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立.

下面证明, 当 $a > -3$ 时, $f(x) \geq g(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上不恒成立.

$$f(x) - g(x) \leq \frac{1}{1+x} - 1 - ax - \frac{x^3}{2} - 2x \cos x,$$

$$= \frac{-x}{1+x} - ax - \frac{x^3}{2} - 2x \cos x$$

$$= -x \left(\frac{1}{1+x} + a + \frac{x^2}{2} + 2 \cos x \right)$$

$$\text{记 } I(x) = \frac{1}{1+x} + a + \frac{x^2}{2} + 2 \cos x = \frac{1}{1+x} + a + G(x),$$

$$\text{则 } I'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + G'(x), \text{ 当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } I'(x) < 0.$$

故 $I(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是减函数,

于是 $I(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为 $[a+1+2 \cos 1, a+3]$.

因为当 $a > -3$ 时, $a+3 > 0$, 所以存在 $x \in (0, 1)$, 使得 $I(x_0) > 0$,

此时 $f(x_0) < g(x_0)$, 即 $f(x) \geq g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不恒成立.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式

练2

4. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + (a-1) \ln x (a < 0)$.

(1) 若 $a = -2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 设函数 $g(x) = \frac{a}{x}$. 若对于任意 $x \in (1, e]$, 都有 $f(x) > g(x)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $y = -1$

(2) 当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, -a)$, $(1, +\infty)$, 减区间为 $(-a, 1)$.

当 $a < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, 1)$, $(-a, +\infty)$, 减区间为 $(1, -a)$.

当 $a = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间.

(3) $1 - e < a < 0$

【解析】(1) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$.

当 $a = -2$ 时, $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3\ln x$, $f(1) = -1$,

$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$, $f'(1) = 0$.

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -1$.

(2) 因为 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} + \frac{a-1}{x} = \frac{x^2 + (a-1)x - a}{x^2} = \frac{(x-1)(x+a)}{x^2}$.

令 $f'(x) = 0$, 即 $x^2 + (a-1)x - a = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = -a$.

(1) 当 $0 < -a < 1$, 即 $-1 < a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < -a$ 或 $x > 1$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $-a < x < 1$.

所以函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, -a)$, $(1, +\infty)$, 减区间为 $(-a, 1)$.

(2) 当 $-a > 1$, 即 $a < -1$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > -a$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < -a$.

所以函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, 1)$, $(-a, +\infty)$, 减区间为 $(1, -a)$.

(3) 当 $-a = 1$, 即 $a = -1$ 时, $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间.

综上所述:

当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, -a)$, $(1, +\infty)$, 减区间为 $(-a, 1)$.

当 $a < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, 1)$, $(-a, +\infty)$, 减区间为 $(1, -a)$.

当 $a = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间.

(3) 因为对于任意 $x \in (1, e]$, 都有 $f(x) > g(x)$ 成立,

则 $x + (a-1)\ln x > 0$, 等价于 $a - 1 > \frac{-x}{\ln x}$.

令 $F(x) = \frac{-x}{\ln x}$, 则当 $x \in (1, e]$ 时, $a - 1 > F(x)_{\max}$.

$F'(x) = \frac{1 - \ln x}{(\ln x)^2}$.

因为当 $x \in (1, e]$ 时, $F'(x) \geq 0$, 所以 $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增.

所以 $F(x)_{\max} = F(e) = -e$.

所以 $a > 1 - e$.

所以 $1 - e < a < 0$.

【标注】【知识点】求函数单调区间（含参二次型导函数）；利用导数解决不等式恒成立问题；求在某点处的切线方程

3. 不同变量的不同函数比较大小的恒成立问题

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

【教师备注】

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > g(x)_{\min}$.

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$.

例3

5. 已知三次函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = -3x^2 + 3$ 且 $f(0) = -1$, $g(x) = x \ln x + \frac{a}{x} (a \geq 1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值 .

(2) 求证：对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$.

【答案】 (1) $f(x)_{\text{极小值}} = f(-1) = -3$, $f(x)_{\text{极大值}} = f(1) = 1$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 依题意得 $f(x) = -x^3 + 3x - 1$, $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是减函数, 在 $(-1, 1)$ 上是增函数,

$\therefore f(x)_{\text{极小值}} = f(-1) = -3$, $f(x)_{\text{极大值}} = f(1) = 1$.

(2) 法1: 易得 $x > 0$ 时, $f(x)_{\text{最大值}} = 1$,

依题意知, 只要 $1 \leq g(x) (x > 0) \Leftrightarrow 1 \leq x \ln x + \frac{a}{x} (a \geq 1) (x > 0)$,

由 $a \geq 1$ 知, 只要 $x \leq x^2 \ln x + 1 (x > 0) \Leftrightarrow x^2 \ln x + 1 - x \geq 0 (x > 0)$

令 $h(x) = x^2 \ln x + 1 - x (x > 0)$, 则 $h'(x) = 2x \ln x + x - 1$

注意到 $h'(1) = 0$, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$,

即 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, 在 $(1, +\infty)$ 是增函数, $h(x)_{\text{最小值}} = h(1) = 0$,

即 $h(x) \geq 0$, 综上知对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$,

法2: 易得 $x > 0$ 时, $f(x)_{\text{最大值}} = 1$,

由 $a \geq 1$ 知, $g(x) \geq x \ln x + \frac{1}{x} (x > 0)$, 令 $h(x) = x \ln x + \frac{1}{x} (x > 0)$,

$$\text{则 } h'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x^2} = \ln x + \frac{x^2 - 1}{x^2},$$

注意到 $h'(1) = 0$, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$,

即 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, 在 $(1, +\infty)$ 是增函数,

$$h(x)_{\text{最小值}} = h(1) = 1 \text{ 所以 } h(x)_{\text{最小值}} = 1,$$

$$\text{即 } g(x)_{\text{最小值}} = 1,$$

综上知对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$.

【标注】【知识点】直接求函数的极值（不含参）；通过构造函数证明不等式

练3

6. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + x - k$, $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取得极值 -2 .

(1) 求函数 $g(x)$ 的单调区间和极大值;

(2) 若对任意 $x_1 \in [-1, 3]$, $x_2 \in [-1, 3]$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$;

递减区间为 $(-1, 1)$, 极大值为 $g(-1) = 2$.

(2) $k \geq 23$

【解析】 (1) $\because g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$$\therefore g(-x) = g(x), \text{ 可得 } b = d = 0, \text{ 即 } g(x) = ax^3 + cx (a \neq 0),$$

又当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取得极值 -2 ,

$$\therefore \begin{cases} g'(1) = 0 \\ g(1) = -2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + c = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases}, \text{ 故函数 } g(x) = x^3 - 3x,$$

$$\text{导函数 } g'(x) = 3x^2 - 3, \text{ 令 } 3x^2 - 3 = 0 \text{ 解得 } x = \pm 1,$$

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-1, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

故当 $x = -1$ 时, $g(x)$ 取到极大值 $g(-1) = 2$.

(2) 若对任意 $x_1 \in [-1, 3]$, $x_2 \in [-1, 3]$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立,

即 $f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值都小于或等于 $g(x)$ 的最小值,

由 (1) 可知: 当 $x \in [-1, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, 3]$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

故当 $x = 1$ 时, 函数 $g(x)$ 取到极小值, 也是该区间的最小值 $g(1) = -2$,
 而 $f(x) = 2x^2 + x - k$ 为开口向上的抛物线,
 对称轴为 $x = -\frac{1}{4}$,
 故当 $x = 3$ 时取最大值 $f(3) = 21 - k$,
 由 $21 - k \leq -2$, 解得 $k \geq 23$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

4. 带绝对值的不同变量的同一函数比较大小的恒成立问题

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), |f(x_1) - f(x_2)| < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____.

【教师备注】

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), |f(x_1) - f(x_2)| < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} - f(x)_{\min} < k$.

例4

7. 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

- (1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;
 (2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) $[-1, 1]$.

【解析】(1) $f'(x) = me^{mx} + 2x - m$,

$f'(x) = m^2 e^{mx} + 2 \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $f'(x) = me^{mx} + 2x - m$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

而 $f'(0) = 0$, 所以 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 知 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$,

当 $m = 0$ 时, $f(x) = 1 + x^2$, 此时 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 2

所以此时 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$ 成立,

当 $m \neq 0$ 时, $f(-1) = e^{-m} + 1 + m$, $f(1) = e^m + 1 - m$

$g(m) = f(1) - f(-1) = e^m - e^{-m} - 2m$,

$g'(m) = e^m + e^{-m} - 2 \geq 0$,

所以 $g(m) = e^m - e^{-m} - 2m$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

而 $g(0) = 0$, 所以 $m > 0$ 时, 即 $f(1) > f(-1)$

所以 $m < 0$ 时 $g(m) < 0$, 即 $f(1) < f(-1)$,

当 $m > 0$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(1) - 1 = e^m - m \leq e - 1$,

所以 $0 < m \leq 1$

当 $m < 0$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(-1) - 1 = e^{-m} + m = e^{-m} - (-m) \leq e - 1$

可得 $-m \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m < 0$

综上 m 的取值范围是 $[-1, 1]$.

【标注】【知识点】二阶导问题；利用导数解决不等式恒成立问题

二、能成立问题

1. 函数与常数比较大小的能成立问题

$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____.

$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____.

【教师备注】

$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > k$.

$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} < k$.

例1

8. 已知函数 $f(x) = x^2 - (a+2)x + a \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的单调性.

(2) 若存在 $x \in [1, e]$, 使得 $f(x) \leq 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 见解析.

(2) $a \geq -1$.

【解析】 (1) 求导数可得 $f'(x) = 2x - (a+2) + \frac{a}{x}$,
$$= \frac{2x^2 - (a+2)x + a}{x},$$
$$= \frac{(2x-a)(x-1)}{x} \quad x \in [1, e],$$
当 $\frac{a}{2} \leq 1$ 即 $a \leq 2$ 时, $x \in [1, e]$,
 $f'(x) \geq 0$, 此时 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,
当 $1 < \frac{a}{2} < e$ 即 $2 < a < 2e$ 时,

$x \in (1, \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, \frac{a}{2})$ 上单调递减,
 $x \in (\frac{a}{2}, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\frac{a}{2}, e)$ 上单调递增,
 当 $\frac{a}{2} \geq e$ 即 $a \geq 2e$ 时, $x \in [1, e]$,
 $f'(x) \leq 0$, 此时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减.

(2) 当 $a \leq 2$ 时,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(1) = -a - 1$,

$\therefore -1 \leq a \leq 2$.

当 $2 < a < 2e$ 时,

$f(x)$ 在 $(1, \frac{a}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{a}{2}, e)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{a}{2}) = -\frac{a^2}{4} - a + a \ln \frac{a}{2} = a(\ln \frac{a}{2} - \frac{a}{4} - 1)$,

$\therefore 2 < a < 2e$, $\therefore 0 < \ln \frac{a}{2} < 1$, $\frac{3}{2} < \frac{a}{4} + 1 < \frac{e}{2} + 1$,

$\therefore f(\frac{a}{2}) = a(\ln \frac{a}{2} - \frac{a}{4} - 1) < 0$,

$\therefore 2 < a < 2e$,

当 $a \geq 2e$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(e) = e^2 - (a + 2)e + a$,

$\therefore a \geq 2e > \frac{e^2 - 2e}{e - 1}$, $\therefore f(e) < 0$, $\therefore a \geq 2e$,

综上可得 $a \geq -1$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题；求函数单调区间（含参二次型导函数）

9. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$ (a 为实常数).

若存在 $x \in [1, e]$, 使得 $f(x) \leq (a + 2)x$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $[-1, +\infty)$.

【解析】 (1) 不等式 $f(x) \leq (a + 2)x$, 可化为 $a(x - \ln x) \geq x^2 - 2x$.

$\therefore x \in [1, e]$,

$\therefore \ln x \leq 1 \leq x$ 且等号不能同时取, 所以 $\ln x < x$, 即 $x - \ln x > 0$,

因而 $a \geq \frac{x^2 - 2x}{x - \ln x} (x \in [1, e])$,

令 $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - \ln x} (x \in [1, e])$, 则 $g'(x) = \frac{(x - 1)(x + 2 - 2 \ln x)}{(x - \ln x)^2}$,

当 $x \in [1, e]$ 时, $x - 1 \geq 0$, $\ln x \leq 1$, $x + 2 - 2 \ln x > 0$,

从而 $g'(x) \geq 0$ (仅当 $x = 1$ 时取等号), 所以 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上为增函数,

故 $g(x)$ 的最小值为 $g(1) = -1$ ，所以 a 的取值范围是 $[-1, +\infty)$ 。

【标注】【知识点】直接求函数的单调性（不含参）；利用导数解决不等式能成立问题；求函数最值（含参二次型导函数）

练1

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + b}$ ， $b > 0$ ，若 $\exists x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ ，使 $f(x) \geq 1$ ，求 b 的取值范围。

【答案】 $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ 。

【解析】 因为 $b > 0$ ， $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ ，

所以 $f(x) \geq 1$ 等价于 $b \leq -x^2 + x$ ，其中 $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ 。

设 $g(x) = -x^2 + x$ ， $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ 上的最大值为 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ 。

则“ $\exists x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ ，使得 $b \leq -x^2 + x$ ”等价于 $b \leq \frac{1}{4}$ 。

所以， b 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ 。

【标注】【知识点】利用导数证明不等式能成立问题

2. 同自变量的不同函数比较大小的能成立问题

$\exists x_0 \in (a, b)$ ， $f(x_0) > g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____。

$\exists x_0 \in (a, b)$ ， $f(x_0) < g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____。

【教师备注】

$\exists x_0 \in (a, b)$ ， $f(x_0) > g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} > 0$ 。

$\exists x_0 \in (a, b)$ ， $f(x_0) < g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} < 0$ 。

例2

11. 已知函数 $f(x) = px - \frac{p}{x} - 2\ln x$ ，设函数 $g(x) = \frac{2e}{x}$ ，若在 $[1, e]$ 上至少存在一点 x_0 ，使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立，求实数 p 的取值范围。

【答案】 $\left(\frac{4e}{e^2 - 1}, +\infty\right)$ 。

【解析】 $\because g(x) = \frac{2e}{x}$ 在 $[1, e]$ 上是减函数，

$\therefore x = e$ 时, $g(x)_{\min} = 2$; $x = 1$ 时, $g(x)_{\max} = 2e$, 即 $g(x) \in [2, 2e]$,

①当 $p < 0$ 时, $h(x) = px^2 - 2x + p$, 其图象为开口向下的抛物线,

对称轴 $x = \frac{1}{p}$ 在 y 轴的左侧, 且 $h(0) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x \in [1, e]$ 内是减函数.

当 $p = 0$ 时, $h(x) = -2x$, 因为 $x \in [1, e]$, 所以 $h(x) < 0$, $f'(x) = -\frac{2x}{x^2} < 0$,

此时, $f(x)$ 在 $x \in [1, e]$ 内是减函数.

故当 $p \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减 $\Rightarrow f(x)_{\max} = f(1) = 0 < 2$, 不合题意;

②当 $0 < p < 1$ 时, 由 $x \in [1, e] \Rightarrow x - \frac{1}{x} \geq 0$, 所以

$$f(x) = p(x - \frac{1}{x}) - 2\ln x \leq x - \frac{1}{x} - 2\ln x.$$

又由 (II) 知当 $p = 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上是增函数,

$$\therefore x - \frac{1}{x} - 2\ln x \leq e - \frac{1}{e} - 2\ln e = e - \frac{1}{e} - 2 < 2, \text{ 不合题意};$$

③当 $p \geq 1$ 时, 由 (II) 知 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上是增函数, $f(1) = 0 < 2$,

又 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上是减函数,

故只需 $f(x)_{\max} > g(x)_{\min}$, $x \in [1, e]$, 而 $f(x)_{\max} = f(e) = p(e - \frac{1}{e}) - 2\ln e$,

$$g(x)_{\min} = 2,$$

即 $p(e - \frac{1}{e}) - 2\ln e > 2$, 解得 $p > \frac{4e}{e^2 - 1}$, 所以实数 p 的取值范围是 $(\frac{4e}{e^2 - 1}, +\infty)$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题

练2

12. 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, $g(x) = -\frac{1+a}{x} (a > 0)$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 求函数 $h(x)$ 的单调区间;

(3) 若存在 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 极小值为 $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$

(2) $h(x)$ 的递减区间为 $(0, 1+a)$; 递增区间为 $(1+a, +\infty)$

(3) $(\frac{e^2+1}{e-1}, +\infty)$

【解析】 (1) $f(x) = x - a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x-1}{x}.$$

由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$. 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

所以当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 极小值为 $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$;

(2) $h(x) = f(x) - g(x) = x - a \ln x + \frac{1+a}{x}$, 其定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{又 } h'(x) = \frac{x^2 - ax - (1+a)}{x^2} = \frac{(x+1)[x-(1+a)]}{x^2}.$$

由 $a > 0$ 可得 $1+a > 0$, 在 $x \in (0, 1+a)$ 上 $h'(x) < 0$, 在 $x \in (1+a, +\infty)$ 上 $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 的递减区间为 $(0, 1+a)$; 递增区间为 $(1+a, +\infty)$.

(3) 若在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立,

即在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 , 使得 $h(x_0) < 0$. 即 $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值小于零.

① 当 $1+a \geq e$, 即 $a \geq e-1$ 时, 由 (II) 可知 $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减.

故 $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值为 $h(e)$,

$$\text{由 } h(e) = e + \frac{1+a}{e} - a < 0, \text{ 可得 } a > \frac{e^2+1}{e-1}.$$

$$\text{因为 } \frac{e^2+1}{e-1} > e-1. \text{ 所以 } a > \frac{e^2+1}{e-1};$$

② 当 $1 < 1+a < e$, 即 $0 < a < e-1$ 时,

由 (II) 可知 $h(x)$ 在 $(1, 1+a)$ 上单调递减, 在 $(1+a, e)$ 上单调递增.

$h(x)$ 在 $[1, e]$ 上最小值为 $h(1+a) = 2+a-a \ln(1+a)$.

因为 $0 < \ln(1+a) < 1$, 所以 $0 < a \ln(1+a) < a$.

$\therefore 2+a-a \ln(1+a) > 2$, 即 $h(1+a) > 2$ 不满足题意, 舍去.

$$\text{综上所述: } a \in \left(\frac{e^2+1}{e-1}, +\infty \right).$$

【标注】【知识点】直接求函数的极值(不含参); 利用导数解决不等式能成立问题; 求函数单调区间(含参二次型导函数)

3. 不同变量的不同函数比较大小的能成立问题

$\exists x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____.

【教师备注】

$\exists x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > g(x)_{\min}$.

例3

13. 设函数 $f(x) = x - a \ln x + \frac{b}{x}$ 在 $x=1$ 处取得极值.

(1) 求 a 与 b 满足的关系式.

(2) 若 $a > 3$, 函数 $g(x) = a^2 x^2 + 3$, 若存在 $m_1, m_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$, 使得 $|f(m_1) - g(m_2)| < 9$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $b = 1 - a$.

(2) $a \in (3, 4)$.

【解析】(1) $f'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$,

由 $f'(1) = 0$, 得 $b = 1 - a$.

(2) 当 $a > 3$ 时, $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为增函数, 在 $(1, 2]$ 为减函数,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = 2 - a < 0$.

因为函数 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上是单调递增函数,

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}a^2 + 3 > 0$.

所以 $g(x) > f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上恒成立.

要使存在 $m_1, m_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$, 使得 $|f(m_1) - g(m_2)| < 9$ 成立,

只需要 $g(\frac{1}{2}) - f(1) < 9$, 即 $\frac{1}{4}a^2 + 3 - (2 - a) < 9$, 所以 $-8 < a < 4$.

又因为 $a > 3$, 所以 a 的取值范围是 $a \in (3, 4)$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数证明不等式能成立问题; 已知极值情况求函数解析式; 导数与最值

练3

14. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3 - ax$.

若 $\exists x_1 \in [1, 2], \exists x_2 \in [2, 3]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立.

【答案】(1) $a \leq 8$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题; 利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题

恒成立问题与能成立问题题型汇总

再来默写一遍试试看吧~

恒成立问题

① $\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____

② $\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____.

③ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____.

④ $\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____.

⑤ $\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

⑥ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

⑦ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), |f(x_1) - f(x_2)| < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

① $\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > k$.

② $\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} > 0$.

③ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > g(x)_{\min}$.

④ $\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < k$.

⑤ $\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} < 0$.

⑥ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$.

⑦ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), |f(x_1) - f(x_2)| < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} - f(x)_{\min} < k$.

能成立问题

① $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

② $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

③ $\exists x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

④ $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

⑤ $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

① $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > k$.

② $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} > 0$.

③ $\exists x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > g(x)_{\min}$.

④ $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} < k$.

⑤ $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} < 0$.