

恒成立问题与能成立问题

一、恒成立问题

1. 函数与常数比较大小的恒成立问题

$\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____

$\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

例1

1. 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in R$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 都有 $f(x) > 0$ 成立, 求 a 的取值范围.

练1

2. 已知函数 $f(x) = (x^2 - x - \frac{1}{a})e^{ax}$ ($a > 0$), 若不等式 $f(x) + \frac{5}{a} \geq 0$ 对 $x \in R$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

2. 同自变量的不同函数比较大小的恒成立问题

$\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

$\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

例2

3. 已知函数 $f(x) = (1+x)e^{-2x}$, $g(x) = ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x \cos x$, 当 $x \in [0, 1]$ 时,

(1) 求证: $1 - x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$.

(2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

练2

4. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + (a-1) \ln x$ ($a < 0$).

(1) 若 $a = -2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 设函数 $g(x) = \frac{a}{x}$. 若对于任意 $x \in (1, e]$, 都有 $f(x) > g(x)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

3. 不同变量的不同函数比较大小的恒成立问题

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

例3

5. 已知三次函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = -3x^2 + 3$ 且 $f(0) = -1$, $g(x) = x \ln x + \frac{a}{x} (a \geq 1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值 .

(2) 求证 : 对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$.

练3

6. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + x - k$, $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取得极值 -2 .

(1) 求函数 $g(x)$ 的单调区间和极大值 ;

(2) 若对任意 $x_1 \in [-1, 3], x_2 \in [-1, 3]$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 求实数 k 的取值范围 .

4. 带绝对值的不同变量的同一函数比较大小的恒成立问题

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), |f(x_1) - f(x_2)| < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

例4

7. 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

(1) 证明 : $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增 ;

(2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围 .

二、 能成立问题

1. 函数与常数比较大小的能成立问题

$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

例1

8. 已知函数 $f(x) = x^2 - (a+2)x + a \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的单调性 .

(2) 若存在 $x \in [1, e]$, 使得 $f(x) \leq 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

9. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$ (a 为实常数).

若存在 $x \in [1, e]$, 使得 $f(x) \leq (a+2)x$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

练1

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + b}$, $b > 0$, 若 $\exists x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, 使 $f(x) \geq 1$, 求 b 的取值范围.

2. 同自变量的不同函数比较大小的能成立问题

$\exists x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) > g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____.

$\exists x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) < g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____.

例2

11. 已知函数 $f(x) = px - \frac{p}{x} - 2 \ln x$, 设函数 $g(x) = \frac{2e}{x}$, 若在 $[1, e]$ 上至少存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立, 求实数 p 的取值范围.

练2

12. 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, $g(x) = -\frac{1+a}{x}$ ($a > 0$).

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 求函数 $h(x)$ 的单调区间;

(3) 若存在 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

3. 不同变量的不同函数比较大小的能成立问题

$\exists x_1, x_2 \in (a, b)$, $f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____.

例3

13. 设函数 $f(x) = x - a \ln x + \frac{b}{x}$ 在 $x = 1$ 处取得极值.

(1) 求 a 与 b 满足的关系式.

(2) 若 $a > 3$, 函数 $g(x) = a^2 x^2 + 3$, 若存在 $m_1, m_2 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使得 $|f(m_1) - g(m_2)| < 9$ 成立, 求 a 的取值范围.

练3

14. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3 - ax$.

若 $\exists x_1 \in [1, 2]$, $\exists x_2 \in [2, 3]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立.

恒成立问题与能成立问题题型汇总

再来默写一遍试试看吧~

恒成立问题

- ① $\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____
- ② $\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ③ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ④ $\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ⑤ $\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ⑥ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ⑦ $\forall x_1, x_2 \in (a, b), |f(x_1) - f(x_2)| < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ .

能成立问题

- ① $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ② $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ③ $\exists x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ④ $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- ⑤ $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .