

含参函数的极值与最值

与【极值与最值】一讲的含参函数极值与最值不同，此讲所要掌握的极值与最值问题，都需要分类讨论做好详细分析，以此求解出函数的极值与最值、参数的值或取值范围。

一、含参函数极值问题(需分类讨论)

例1

第一题【教师备注】

在做函数问题时，首先要确定函数的定义域，此题函数定义域为 $(0, +\infty)$ ；

其次，此题中由于参数 m 单独在分母的位置上，所以 $m \neq 0$ ，因此在分类讨论时要尤为注意。

此题求解导数为零的解时，要先将导数通分化成分式形式，再对各项分别判断正负；

由于分子是二次函数，且二次项系数不为0，能因式分解，因此判断两根 $-\frac{1}{2m}$ 和 $\frac{1}{m}$ 的大小，只需通过 m 的正负即可判断，与此同时，不要忘记分母是 mx ，所以此题导数的正负实际是判断高次不等式 $mx(2mx+1)(mx-1)$ 的正负。

1. 已知函数 $f(x) = mx^2 - x - \frac{\ln x}{m}$.
求函数 $f(x)$ 的极值 .

【答案】 (1) $m > 0$ 时极小值 $\frac{\ln m}{m}$.
 $m < 0$ 时极大值 $\frac{m}{4m} + \frac{\ln(-2m)}{m}$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 且 $m \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{令 } f'(x) &= 2mx - 1 - \frac{1}{mx} \\ &= \frac{2m^2x^2 - mx - 1}{mx} \\ &= \frac{(2mx+1)(mx-1)}{mx}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得到 } x_1 = -\frac{1}{2m}, x_2 = \frac{1}{m},$$

当 $m > 0$ 时， $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(0, \frac{1}{m}\right)$	$\frac{1}{m}$	$\left(\frac{1}{m}, +\infty\right)$
$f'(x)$	—	0	—
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{m}$ 处取得极小值 $f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{\ln m}{m}$.

当 $m < 0$ 时, 当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(0, -\frac{1}{2m}\right)$	$-\frac{1}{2m}$	$\left(-\frac{1}{2m}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极小值	$\searrow$

所以函数 $f(x)$ 在 $x = -\frac{1}{2m}$ 处取得极大值 $f\left(-\frac{1}{2m}\right) = \frac{3}{4m} + \frac{\ln(-2m)}{m}$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题

2. 已知函数 $f(x) = xe^{ax}$, (其中常数 $e = 2.71828 \dots$, 是自然对数的底数).

求函数 $f(x)$ 的极值.

【答案】(1) 当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无极值;

若 $a > 0$, 极小值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{ea}$, 无极大值;

若 $a < 0$, 极大值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{ea}$, 无极小值.

【解析】(1) 由 $f(x) = xe^{ax}$ 求导得 $f'(x) = (1 + ax)e^{ax}$,

①当 $a = 0$ 时, $f'(x) = e^{ax} > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 因此函数 $f(x)$ 无极值;

②若 $a > 0$, 令 $f'(x) = (1 + ax)e^{ax} = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$,

当 $x < -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$,

函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减,

函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 存在极小值, 其极小值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{ea}$, 无极大值;

③若 $a < 0$, 令 $f'(x) = (1 + ax)e^{ax} = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$,

当 $x < -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,

函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单调递减,

所以函数 $f(x)$ 有极大值, 其极大值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{ea}$, 无极小值.

【标注】【知识点】求函数极值(含参指对型导函数); 隐零点问题; 利用导数解决不等式恒成立问题

3. 已知函数 $f(x) = (x^2 + ax + a)e^{-x}$, (a 为常数, e 为自然对数的底).

若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 时取得极小值, 试确定 a 的取值范围;

【答案】 (1) $a < 2$.

【解析】 (1) $f'(x) = (2x + a)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + ax + a) = e^{-x}[-x^2 + (2 - a)x]$

$$= -e^{-x} \cdot x[x - (2 - a)].$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = 2 - a$.

当 $2 - a = 0$, 即 $a = 2$ 时,

$$f'(x) = -x^2 e^{-x} \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 没有极小值;

当 $2 - a > 0$, 即 $a < 2$ 时,

若 $x < 0$, 则 $f'(x) < 0$.

若 $0 < x < 2 - a$, 则 $f'(x) > 0$.

所以 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

当 $2 - a < 0$, 即 $a > 2$ 时,

若 $x > 0$, 则 $f'(x) < 0$.

若 $2 - a < x < 0$, 则 $f'(x) > 0$.

此时 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

综上所述, 使函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 时取得极小值的 a 的取值范围是 $a < 2$.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数范围

练1

4. 已知函数 $f(x) = \ln(1 + x) - mx$, 其中 $m \in \mathbf{R}$.

求函数 $f(x)$ 的极值.

【答案】 (1) $m \leq 0$ 时, 无极值. $m > 0$ 时, 极大值为 $m - \ln m - 1$, 无极小值.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{1}{1+x} - m (x > -1)$,

① $m \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立,

故 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 无极值.

② $m > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $-1 < x < \frac{1}{m} - 1$,

令 $f'(x) < 0$ 得 $x > \frac{1}{m} - 1$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-1, \frac{1}{m} - 1\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{m} - 1, +\infty\right)$ 上单调递减,
从而 $f(x)_{\text{极大值}} = f\left(\frac{1}{m} - 1\right) = m - \ln m - 1$, 无极小值.

【标注】【知识点】求参数范围 (含参一次型导函数); 求函数极值 (含参一次型导函数)

5. 已知函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x} (a > 0)$.

求 $f(x)$ 的极大值.

【答案】 (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 无极大值.

② $a > 1$ 时, 极小值 $a - (a+1)\ln a - 1$, 极大值是 $1 - a$.

② $0 < a < 1$ 时, 极大值 $a - (a+1)\ln a - 1$, 极小值是 $1 - a$.

【解析】 (1) $f'(x) = 1 - \frac{a+1}{x} + \frac{a}{x^2}$,

$$= \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2} = \frac{(x-1)(x-a)}{x^2},$$

① $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$, 此时 $f(x)$ 无极大值.

② $a > 1$ 时, $f'(x) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = a$.

x	$(0, 1)$	1	$(1, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$f(1) = 1 - a$, 此时 $f(x)$ 的极大值是 $1 - a$.

② $0 < a < 1$ 时,

x	$(0, 1)$	a	$(a, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$f(a) = a - (a+1)\ln a - 1$.

【标注】【知识点】求函数极值 (含参二次型导函数)

二、含参函数最值问题 (需分类讨论)

例1

第六题【教师备注】

当区间存在**开**端点时，注意判断最值点能否存在

6. 已知函数 $f(x) = e^x + 2ax$.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 0，求 a 的值 .

【答案】 (1) $a = -\frac{e}{2}$.

【解析】 (1) 由 (1) 可知，当 $a \geq 0$ 时，函数 $f(x) = e^x + 2ax > 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，不符合题意 .

当 $a < 0$ 时，当 $x \in (-\infty, \ln(-2a))$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x \in (\ln(-2a), +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增 .

① 当 $\ln(-2a) \leq 1$ ，即 $-\frac{e}{2} \leq a < 0$ 时， $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = 2a + e$.
解 $2a + e = 0$ ，得 $a = -\frac{e}{2}$ ，符合题意 .

② 当 $\ln(-2a) > 1$ ，即 $a < -\frac{e}{2}$ 时， $f(x)$ 的最小值为

$f(\ln(-2a)) = -2a + 2a \ln(-2a)$ ，

解 $-2a + 2a \ln(-2a) = 0$ ，得 $a = -\frac{e}{2}$ ，不符合题意 .

综上， $a = -\frac{e}{2}$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

第七题【教师备注】

分类讨论判断含参函数的单调性后，注意检验由最值条件解出的参数值是否在分类讨论得到的参数取值范围内。

7. 若函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{x}$ ($m \in \mathbf{R}$) 在区间 $[1, e]$ 上取得最小值 4，求实数 m .

【答案】 $-3e$.

【解析】 先对函数求导，有 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2} = \frac{x+m}{x^2}$ ($x > 0$)，讨论给定区间内的最（极）值，可按照函数本身有无极值点、极值点是否在区间内等步骤进行，故可分如下讨论：

① 当 $m \geq 0$ 时， $f'(x) > 0$ 恒成立，故函数在 $[1, e]$ 上单调增，即最小值为

$f(1) = -m = 4 \Rightarrow m = -4$

，不满足题设要求，舍去；

② 当 $m < 0$ 时，令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -m$ ，且易知 $f(x)$ 在 $(0, -m)$ 上单调减，在

$(-m, +\infty)$ 上单调增，即是考虑 $x = -m$ 与区间 $[1, e]$ 的位置关系，故有：

(1)当 $-m \leq 1 \Rightarrow m \geq -1$ 时, $[1, e] \subseteq (-m, +\infty)$, 故函数在 $[1, e]$ 上单调增, 即最小值为 $f(1) \Rightarrow m = -4$, 不满足;

(2)当 $1 < -m < e \Rightarrow m \in (-e, -1)$ 时, 函数在 $(1, -m)$ 上单调减, 在 $(-m, e)$ 上单调增, 故函数的最小值为 $f(-m) = \ln(-m) + 1 = 4 \Rightarrow m = -e^3$, 而 $-e^3 \notin (-e, -1)$, 故不满足;

(3)当 $-m \geq e \Rightarrow m \leq -e$ 时, $[1, e] \subseteq (0, -m)$, 故函数在区间内单调递减, 即最小值为 $f(e) = 1 - \frac{m}{e} = 4 \Rightarrow m = -3e$, 符合题意, 故得.

故答案为: $-3e$.

【标注】【知识点】已知最值情况求参数值或解析式

8. 已知 $g(x) = x \ln x - a(x-1)$, 其中 $a > 0$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最大值.

【答案】见解析.

【解析】 $g(x) = x \ln x - a(x-1)$, 则 $g'(x) = \ln x + 1 - a$,

解 $g'(x) = 0$, 得 $x = e^{a-1}$,

所以, 在区间 $(0, e^{a-1})$ 上, $g(x)$ 为递减函数,

在区间 $(e^{a-1}, +\infty)$ 上, $g(x)$ 为递增函数.

当 $e^{a-1} \leq 1$, 即 $0 < a \leq 1$. $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 最大值为 $g(e) = e + a - ae$.

当 $e^{a-1} \geq e$, 即 $a \geq 2$ 时, 在区间 $[1, e]$ 上, $g(x)$ 为递减函数,

所以 $g(x)$ 最大值为 $g(1) = 0$.

当 $1 < e^{a-1} < e$ 时,

$g(e) - g(1) = e + a - ae > 0$, 解得 $a < \frac{e}{e-1}$,

所以, $1 < a < \frac{e}{e-1}$, $g(x)$ 最大值为 $g(e) = e + a - ae$.

$\frac{e}{e-1} \leq a < 2$ 时, $g(x)$ 最大值为 $g(1) = 0$.

综上所述: 当 $0 < a < \frac{e}{e-1}$, $g(x)$ 最大值为 $g(e) = e + a - ae$.

当 $a \geq \frac{e}{e-1}$ 时, $g(x)$ 的最大值为 $g(1) = 0$.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参指对型导函数)

9. 已知函数 $f(x) = xe^x - a(\frac{1}{2}x^2 + x)$ ($e = 2.718\cdots$) .

求函数在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值 .

【答案】 (1) 当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $-\frac{1}{e} + \frac{a}{2}$;
 当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $-\frac{1}{2}a\ln^2 a$;
 当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $e - \frac{3}{2}a$.

【解析】 (1) $f'(x) = (x+1)(e^x - a)$.

① 当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时, 在区间 $[-1, 1]$, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

所以 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{a}{2}$

② 当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, 在区间 $[-1, \ln a]$, $f'(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, \ln a]$ 上单调递减,

在区间 $[\ln a, 1]$, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[\ln a, 1]$ 上单调递增,

所以 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(\ln a) = -\frac{1}{2}a\ln^2 a$.

③ 当 $a \geq e$ 时, 在区间 $[-1, 1]$, $f'(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减,

所以 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(1) = e - \frac{3}{2}a$.

综上所述, 当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $-\frac{1}{e} + \frac{a}{2}$;

当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $-\frac{1}{2}a\ln^2 a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $e - \frac{3}{2}a$.

【标注】【知识点】直接求函数的极值 (不含参) ; 求函数最值 (含参指对型导函数)

三、含参极值最值问题 (需分类讨论)

例1

10. 已知 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + x - \ln(1+x)$, 其中 $a > 0$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极值, 求 a 的值 .

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间 .

(3) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值是 0, 求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $a = \frac{1}{4}$.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 0)$, $(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$;

单调递增区间为： $\left(0, \frac{1}{a} - 1\right)$.

当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-1, \frac{1}{a} - 1\right)$ ， $(0, +\infty)$ ；

单调递增区间为： $\left(\frac{1}{a} - 1, 0\right)$.

当 $a = 1$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, +\infty)$.

(3) $a \geq 1$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + x - \ln(1+x)$ ($a > 0$) 的定义域为 $(-1, +\infty)$ ，

$$f'(x) = -ax + 1 - \frac{1}{1+x},$$

令 $f'(3) = 0$ ，解得 $a = \frac{1}{4}$. 经过验证满足条件 .

(2) 令 $f'(x) = \frac{-ax(x - \frac{1-a}{a})}{1+x} = 0$ ，解得 $x_1 = 0$ ，或 $x_2 = \frac{1-a}{a}$.

①当 $0 < a < 1$ 时， $x_1 < x_2$ ，

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如表：

x	$(-1, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{a} - 1\right)$	$\frac{1}{a} - 1$	$\left(\frac{1}{a} - 1, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	减	极小值	增	极大值	减

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 0)$ ， $\left(\frac{1}{a} - 1, +\infty\right)$ ；单调递增区间为： $\left(0, \frac{1}{a} - 1\right)$.

②当 $a = 1$ 时， $x_1 = x_2 = 0$ ， $f'(x) = -\frac{x^2}{1+x} \leq 0$ ，

故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, +\infty)$.

③当 $a > 1$ 时， $-1 < x_2 < 0$ ，

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-1, \frac{1}{a} - 1\right)$	$\frac{1}{a} - 1$	$\left(\frac{1}{a} - 1, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	减	极小值	增	极大值	减

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-1, \frac{1}{a} - 1\right)$ ， $(0, +\infty)$ ，单调递增区间为： $\left(\frac{1}{a} - 1, 0\right)$.

综上，当 $0 < a < 1$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 0)$ ， $\left(\frac{1}{a} - 1, +\infty\right)$ ；

单调递增区间为： $\left(0, \frac{1}{a} - 1\right)$.

当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-1, \frac{1}{a} - 1\right)$ ， $(0, +\infty)$ ；

单调递增区间为： $\left(\frac{1}{a} - 1, 0\right)$.

当 $a = 1$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, +\infty)$.

(3) 由(2)可知：

①当 $0 < a < 1$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最大值是 $f\left(\frac{1}{a} - 1\right)$ ，

但 $f\left(\frac{1}{a} - 1\right) > f(0) = 0$ ，

$\therefore 0 < a < 1$ 不合题意；

②当 $a \geq 1$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

$f(x) \leq f(0)$ ，可得 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值为 $f(0) = 0$ ，符合题意。

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值为 0 时， a 的取值范围是 $a \geq 1$ 。

【标注】【知识点】已知最值情况求参数值或解析式；求函数单调区间（含参二次型导函数）

11. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2a+1)x^2 + (a^2+a)x$ ，

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求实数 a 的值；

(2) 若 $a > -1$ ，求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值。

【答案】 (1) 1

(2) 当 $a \geq 1$ 或 $-1 < a < -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时， $f(x)$ 在取得最大值 $f(1) = a^2 - \frac{1}{6}$ ；当 $0 < a < 1$

时， $f(x)$ 取得最大值 $f(a) = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2$ ，

当 $a = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ ， $x=1$ 处取得最大值 0，

当 $-\frac{\sqrt{6}}{6} < a \leq 0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值 $f(0) = 0$ 。

【解析】 (1) $f'(x) = x^2 - (2a+1)x + (a^2+a) = (x-a)[x-(a+1)]$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = a$ ， $x = a+1$ 所以 $f'(x)$ ， $f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, a+1)$	$a+1$	$(a+1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，所以 $a=1$ 。

(2) 因为 $a > -1$ ，所以 $a+1 > 0$ ，当 $a \geq 1$ 时， $f'(x) \geq 0$ ，对 $\forall x \in [0, 1]$ 成立，

所以当 $x=1$ 时， $f(x)$ 取得最大值 $f(1) = a^2 - \frac{1}{6}$ 当 $0 < a < 1$ 时，在 $x \in (0, a)$

时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

在 $x \in (a, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

所以当 $x=a$ 时， $f(x)$ 取得最大值 $f(a) = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2$ ，

当 $a=0$ 时，在 $x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

所以所以当 $x=0$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(0)=0$, 当 $-1 < a < 0$ 时, 在 $x \in (0, a+1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 在 $x \in (a+1, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 又 $f(0)=0$, $f(1)=a^2 - \frac{1}{6}$, 当 $-1 < a < -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 $f(1)=a^2 - \frac{1}{6}$, 当 $-\frac{\sqrt{6}}{6} < a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值 $f(0)=0$, 当 $a = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$, $x=1$ 处取得最大值0, 综上所述, 当 $a \geq 1$ 或 $-1 < a < -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在取得最大值 $f(1)=a^2 - \frac{1}{6}$; 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(a) = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2$, 当 $a = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$, $x=1$ 处取得最大值0, 当 $-\frac{\sqrt{6}}{6} < a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值 $f(0)=0$.

【标注】【知识点】求函数最值(含参二次型导函数)

12. 已知三次函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + (1-a)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)$ ($a \in \mathbf{R}$).
- (1) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 求实数 a 的取值范围及函数 $f(x)$ 的极值.
- (2) 当 $a \geq 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值.

【答案】(1) $a < 1$; 极大值 $-\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2$, 极小值 $\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}$.

(2) $1 \leq a < \frac{5}{3}$ 时, $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{3}$;
 $a \geq \frac{5}{3}$ 时, $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}$.

【解析】(1) $\because f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + (1-a)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)$,

$$\therefore f'(x) = x^2 - 2x + 1 + (1-a)(x-1)$$

$$= (x-1)^2 + (1-a)(x-1)$$

$$= (x-1)(x-a),$$

$\because x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点,

$$\therefore a < 1,$$

$\therefore$

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$$\therefore f(a) = -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2, f(1) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}.$$

(2) 当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单增,

$$f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{3},$$

当 $a > 1$ 时,

① 若 $a \geq 2$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上增, 在 $[1, 2]$ 上减,

$$\therefore f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6},$$

② 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上增, 在 $[1, a]$ 上减, 在 $[a, 2]$ 上增,

$$\text{最大值可能为 } f(1) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}, f(2) = \frac{2}{3},$$

$$(i) 1 \leq a < \frac{5}{3} \text{ 时, } f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{3};$$

$$(ii) \frac{5}{3} \leq a < 2 \text{ 时, } f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6},$$

$$\text{综上: } 1 \leq a < \frac{5}{3} \text{ 时, } f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{3};$$

$$a \geq \frac{5}{3} \text{ 时, } f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}.$$

【标注】【知识点】求函数最值(含参二次型导函数); 已知极值情况求参数范围

练1

13. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + c$ 在点 $x = 2$ 处取得极值 $c - 16$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若 $f(x)$ 有极大值 28, 求 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值.

【答案】 (1) $a = 1, b = -12$.

(2) -4 .

【解析】 (1) 因 $f(x) = ax^3 + bx + c$, 故 $f'(x) = 3ax^2 + b$,

由于 $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处取得极值 $c - 16$,

$$\text{故有 } \begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = c - 16 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 12a + b = 0 \\ 8a + 2b + c = c - 16 \end{cases},$$

$$\text{化简得 } \begin{cases} 12a + b = 0 \\ 4a + b = -8 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 1, b = -12.$$

(2) 由 (1) 知 $f(x) = x^3 - 12x + c$;

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2).$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -2, x_2 = 2$.

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上为增函数;

当 $x \in (-2, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上为减函数;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数.

由此可知 $f(x)$ 在 $x_1 = -2$ 处取得极大值 $f(-2) = 16 + c$,

$f(x)$ 在 $x_1 = 2$ 处取得极小值 $f(2) = c - 16$.

由题设条件知 $16 + c = 28$, 得 $c = 12$,

$f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值为 -4 .

【标注】【知识点】求函数最值(含参一次型导函数)

14. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 定义在 $[-1, 4]$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$, 在 $x = 1$ 处取得极大值.

(1) 若 $a = -2$, 求 b 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最小值(用 b 表示).

【答案】(1) $b = 3$

(2) 当 $b \geq 4$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $\frac{40 - 12b}{3}$;
当 $3 \leq b < 4$, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{2}b^2$,

【解析】(1) 求导, 得 $f'(x) = x^2 + 2ax + b$.

因为函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, 4)$ 上单调递减,

所以 $f'(1) = 1 + 2a + b = 0$.

又因为 $a = -2$,

所以 $b = 3$, 验证知其符合题意.

(2) 由(1), 得 $1 + 2a + b = 0$, 即 $2a = -b - 1$.

所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{b+1}{2}x^2 + bx$, $f'(x) = x^2 - (b+1)x + b = (x-b)(x-1)$.

当 $b \leq 1$ 时, 得当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) = (x-b)(x-1) > 0$,

此时, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 这与题意不符.

当 $b > 1$ 时,

随着 x 的变化, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, b)$	b	$(b, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(b, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, b)$ 上单调递减,

由题意, 得 $b \geq 3$,

所以当 $b \geq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $f(4) = \frac{40}{3} - 4b$,

当 $3 \leq b < 4$, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $f(b) = -\frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{2}b^2$,

综上，当 $b \geq 4$ 时， $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $\frac{40-12b}{3}$ ；当 $3 \leq b < 4$ ， $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{2}b^2$ ，
 (或写成：函数 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $g(b) = \begin{cases} -\frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{2}b^2, & 3 \leq b < 4 \\ \frac{40}{3} - 4b, & b \geq 4 \end{cases}$) .

【标注】【素养】直观想象

【素养】数学运算

【素养】数学抽象

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

【知识点】利用导数确定函数的图象

【知识点】求解函数极值

【知识点】已知极值情况求参数的取值范围

【知识点】利用导数求函数的最值

【知识点】最值与极值的辨析