

含参函数的极值与最值

与【极值与最值】一讲的含参函数极值与最值不同，此讲所要掌握的极值与最值问题，都需要分类讨论做好详细分析，以此求解出函数的极值与最值、参数的值或取值范围。

一、含参函数极值问题(需分类讨论)

例1

1. 已知函数 $f(x) = mx^2 - x - \frac{\ln x}{m}$.
求函数 $f(x)$ 的极值 .
2. 已知函数 $f(x) = xe^{ax}$, (其中常数 $e = 2.71828 \dots$, 是自然对数的底数) .
求函数 $f(x)$ 的极值 .
3. 已知函数 $f(x) = (x^2 + ax + a)e^{-x}$, (a 为常数 , e 为自然对数的底) .
若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 时取得极小值 , 试确定 a 的取值范围 ;

练1

4. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - mx$, 其中 $m \in \mathbf{R}$.
求函数 $f(x)$ 的极值 .
5. 已知函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x} (a > 0)$.
求 $f(x)$ 的极大值 .

二、含参函数最值问题 (需分类讨论)

例1

6. 已知函数 $f(x) = e^x + 2ax$.
若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 0 , 求 a 的值 .
7. 若函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{x} (m \in \mathbf{R})$ 在区间 $[1, e]$ 上取得最小值 4 , 求实数 m .
8. 已知 $g(x) = x \ln x - a(x-1)$, 其中 $a > 0$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最大值 .

练1

9. 已知函数 $f(x) = xe^x - a(\frac{1}{2}x^2 + x)$ ($e = 2.718\cdots$) .

求函数在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值 .

三、含参极值最值问题 (需分类讨论)

例1

10. 已知 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + x - \ln(1+x)$, 其中 $a > 0$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极值 , 求 a 的值 .

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间 .

(3) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值是 0 , 求 a 的取值范围 .

11. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2a+1)x^2 + (a^2+a)x$,

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 , 求实数 a 的值 ;

(2) 若 $a > -1$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值 .

12. 已知三次函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + (1-a)(\frac{1}{2}x^2 - x)$ ($a \in \mathbf{R}$) .

(1) 若 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点 , 求实数 a 的取值范围及函数 $f(x)$ 的极值 .

(2) 当 $a \geq 1$ 时 , 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值 .

练1

13. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + c$ 在点 $x = 2$ 处取得极值 $c - 16$.

(1) 求 a, b 的值 ;

(2) 若 $f(x)$ 有极大值 28 , 求 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值 .

14. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 定义在 $[-1, 4]$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$, 在 $x = 1$ 处取得极大值 .

(1) 若 $a = -2$, 求 b 的值 .

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最小值 (用 b 表示) .