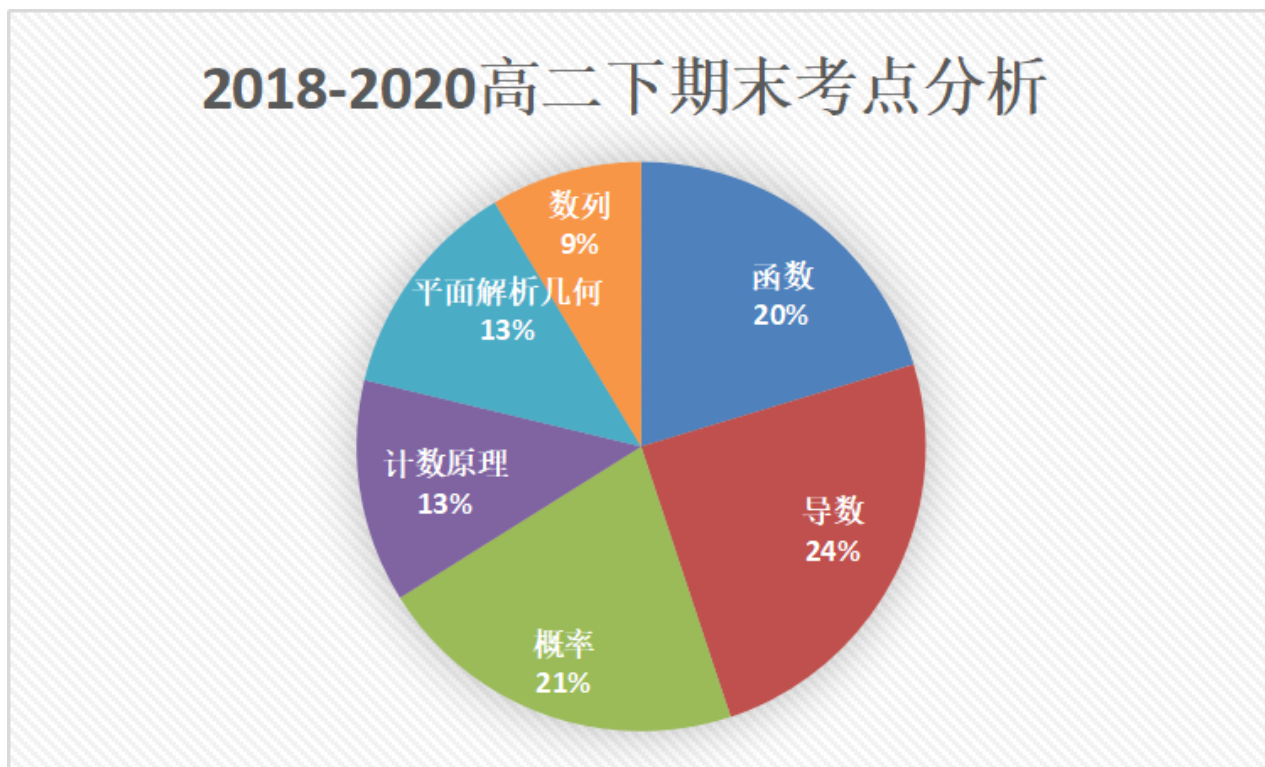


含参函数的单调性

1. 考点分析

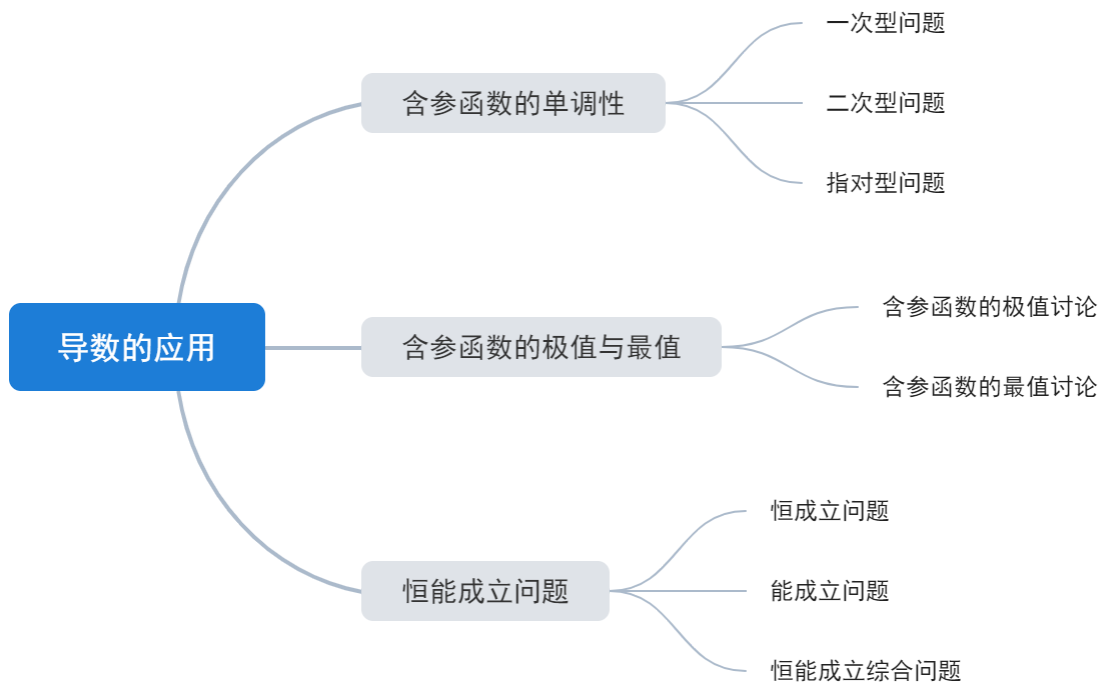
🔗 考点占比



🔗 考点分析

2018-2020期末考试考点频次分析		
模块	考点	考察频次
导数的基础	利用公式和四则运算法则求导	81
	复合函数的求导法则	3
	导数的几何意义	26
	函数的平均变化率与瞬时变化率	4
	导数的定义	2
导数的应用	导数与单调性	63
	导数与最值	35
	导数与极值	26

知识梳理



一、一次型问题

1. 参数在一次项系数上

如： $f(x) = e^x(ax + 1) > 0, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$:

(i) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(ii) 当 $a > 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 增区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

由 $f'(x) < 0$, 得 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 减区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

(iii) 当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 增区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

由 $f'(x) < 0$, 得 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 减区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

例1

1. 已知函数 $f(x) = \ln(x - 1) - k(x - 1) + 1$.

求函数 $f(x)$ 的单调区间.

2. 已知函数 $f(x) = (a + 1)x - \ln x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值.

练1

3. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in \mathbf{R})$.

求 $f(x)$ 的单调区间;

2. 参数在常数项上

如: $f'(x) = e^x(x+a) > 0, x > 0, a \in \mathbf{R}$:

(i) 当 $a \geq 0$ 时, _____ 恒成立, $f(x)$ _____ 区间为 _____;

(ii) 当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____;

由 $f'(x) < 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____.

例2

4. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$.

(1) 当 $a < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $\frac{3}{2}$, 求 a 的值.

练2

5. 判断函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$ 在 $(3, 4)$ 上的单调性.

二、二次型问题

1. 参数在二次项系数上

能因式分解型

如: $f'(x) = a(x+1)(x-a) > 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$:

当 $a = 0$ 时, _____ 恒成立, $f(x)$ 为常函数;

当 $a > 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 的增区间是 _____;

由 $f'(x) < 0$, 得 _____, $f(x)$ 的减区间为 _____.

当 $a < 0$ 时,

(i) $a = -1$, _____, $f(x)$ _____ 区间为 _____;

(ii) $a < -1$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 的增区间是 _____;

由 $f'(x) < 0$, 得 _____ , $f(x)$ 的减区间是 _____ .

(iii) $-1 < a < 0$ 时 ,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____ , $f(x)$ 的增区间是 _____ ;

由 $f'(x) < 0$, 得 _____ , $f(x)$ 的减区间是 _____ .

例1

6. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1 (a \in \mathbf{R})$, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时 , 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

练1

7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}(a-1)x^2 - x + \frac{11}{27}$.

当 $a < 0$ 时 , 求 $f(x)$ 的单调区间 .

不能因式分解型

如 : $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$:

当 $a = 0$ 时 ,

由 $f'(x) = x + 1 > 0$, 得 _____ , $f(x)$ 的增区间是 _____ ;

由 $f'(x) = x + 1 < 0$, 得 _____ , $f(x)$ 的减区间是 _____ .

当 $a > 0$ 时 , $\Delta = 1 - 4a$:

(i) 当 $\Delta \leq 0$ 时 , 即 _____ ,

$f'(x) = ax^2 + x + 1 \geq 0$ 恒成立且不恒为 0 , $f(x)$ 的增区间是 $(-\infty, +\infty)$.

(ii) 当 $\Delta > 0$ 时 , 即 _____ ,

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0$, 得 _____

$f(x)$ 的增区间是 _____

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 < 0$, 得 _____

$f(x)$ 的减区间是 _____

当 $a < 0$ 时 , $\Delta = 1 - 4a > 0$:

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0$, 得 _____

$f(x)$ 的增区间是 _____

由 $f'(x) < 0$, 得 _____

$f(x)$ 的减区间是 _____

例2

8. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

练2

9. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{a}{x} - 2\ln x$, $a \in \mathbf{R}$, 讨论 $f(x)$ 的单调区间.

2. 参数不在二次项系数上

能因式分解型

如: $f'(x) = (x-1)(x-a) > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$:

当 $a = 1$ 时,

$f'(x)$ _____ 恒成立且不恒为0, $f(x)$ _____ 区间为 _____.

当 $a > 1$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____

由 $f'(x) < 0$, 得 _____, $f(x)$ 减区间为 _____

当 $a < 1$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____

由 $f'(x) < 0$, 得 _____, $f(x)$ 减区间为 _____

例3

10. 已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - ax + 1$ ($a > 0$), 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间和极值.

练3

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6ax^2$, 其中 $a \geq 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值.

不能因式分解型

如: $f'(x) = x^2 + ax + 1 > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$:

当 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, 即 _____ 时,

_____ 恒成立且不恒为0, $f(x)$ _____ 区间是 _____.

当 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 即 _____ 时,

由 $f'(x) = x^2 + ax + 1 > 0$, 得 _____

$f(x)$ 增区间是 _____

由 $f'(x) < 0$, 得 _____

$f(x)$ 减区间是 _____

例4

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ 内是减函数，求 a 的取值范围。

练4

13. 求函数 $f(x) = x + \frac{2}{x} + a \ln x (a \in \mathbf{R})$ 的单调区间。

三、指数型问题

指数不等式型：

如： $f'(x) = e^x + a > 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$,

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 区间为_____

当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) = e^x + a > 0$, 得_____, $f(x)$ 增区间为_____;

由 $f'(x) < 0$, 得_____, $f(x)$ 减区间为_____.

例1

14. 已知函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x$.

讨论 $f(x)$ 的单调性。

练1

15. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - a(x - \ln x)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 试求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程。

(2) 当 $a \leq 0$ 时, 试求 $f(x)$ 的单调区间。

四、对数型问题

对数不等式型：

如： $f'(x) = \ln x + a > 0, x > 0, a \in \mathbf{R}$,

由 $f'(x) > 0$, 得_____, $f(x)$ 增区间是_____

由 $f'(x) < 0$, 得_____, $f(x)$ 减区间是_____

例1

16. 已知函数 $f(x) = ax \ln x, (a \neq 0)$ 。

求 $f(x)$ 的单调区间；

 练1

17. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x} (a \in \mathbf{R})$.

求 $f(x)$ 的极值.