

极值与最值练习题

一、极值

1. 已知函数 $f(x) = 2\ln x - x$ ，则 $f(x)$ 的极值点为 () .

- A. 2 B. $x = 2$ C. $(2, 2\ln 2 - 2)$ D. $2\ln 2 - 2$

【答案】 A

【解析】 由题意知 $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 2$,

且当 $x < 2$ 时 , $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单增 ;

当 $x > 2$ 时 , $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单减 ,

由极值点定义知 , $f(x)$ 存在极大值点 , $x = 2$ 处取得 .

故选 A .

【标注】 【知识点】 直接求函数的极值 (不含参)

2. 关于函数 $f(x) = x^3 - x^2 + x$, 下列说法正确的是 () .

- A. 有极大值 , 没有极小值 B. 有极小值 , 没有极大值
C. 既有极大值也有极小值 D. 既无极大值也无极小值

【答案】 D

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$, 是开口向上的二次函数 , 且其判别式恒小于 0 , 故恒正 , 因此 $f(x)$ 单调递增 , 无极值 .

【标注】 【知识点】 导数与极值

【知识点】 导数的运算

【知识点】 函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

3. 函数 $y = 1 + 3x - x^3$ 有 () .

- A. 极小值 -2 , 极大值 2 B. 极小值 -2 , 极大值 3
C. 极小值 -1 , 极大值 1 D. 极小值 -1 , 极大值 3

【答案】D

【解析】 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1+x)(1-x)$ ，令 $y' = 0$ ，得 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 1$ ．当 $x < -1$ 时， $y' < 0$ ，函数 $y = 1 + 3x - x^3$ 是减函数，当 $-1 < x < 1$ 时， $y' > 0$ ，函数 $y = 1 + 3x - x^3$ 是增函数，当 $x > 1$ 时， $y' < 0$ ，函数 $y = 1 + 3x - x^3$ 是减函数， $\therefore$ 当 $x = -1$ 时，函数 $y = 1 + 3x - x^3$ 有极小值，为 -1 ，当 $x = 1$ 时，函数 $y = 1 + 3x - x^3$ 有极大值，为 3 ．

【标注】【素养】数学抽象

【素养】数学运算

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

【知识点】求解函数极值

4. 已知函数 $f(x) = (2x - x^2)e^x$ ，求函数 $f(x)$ 的极值点．

【答案】见解析．

【解析】依题意得， $f'(x) = (2 - x^2)e^x$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = \pm\sqrt{2}$ ，

$f'(x)$ ， $f(x)$ 随 x 的变化情况入下表：

x	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

由上表可知， $x = -\sqrt{2}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点， $x = \sqrt{2}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点．

【标注】【知识点】直接求函数的极值（不含参）

二、最值

5. 函数 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ 在 $[1, 5]$ 上的最大值和最小值分别为（ ）．

A. $f(1)$ ， $f(5)$

B. $f(2)$ ， $f(5)$

C. $f(1)$ ， $f(2)$

D. $f(5)$ ， $f(2)$

【答案】D

【解析】 由二次函数性质可得 .

【标注】 【知识点】 定轴定区间求值域

【素养】 数学运算

6. 函数 $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ 在区间 $[0, 6]$ 上的最大值是 () .

A. $\frac{32}{3}$

B. $\frac{16}{3}$

C. 12

D. 9

【答案】 A

【解析】 $f'(x) = 4x - x^2$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 4$,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 0$ 或 $x > 4$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递增, 在 $(4, 6)$ 上单调递减,

$$\therefore f(x)_{\max} = f(4) = \frac{32}{3}.$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 直接求函数的最值 (不含参)

7. 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最小值为 _____ .

【答案】 -2

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$,

在 $x \in [0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减,

$x \in [1, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = -2.$$

【标注】 【知识点】 直接求函数的最值 (不含参)

8. 函数 $f(x) = e^x - x$ 在 $[-2, 2]$ 上的最小值为 _____ .

【答案】 1

【解析】 $f'(x) = e^x - 1$, $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$; $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore x = 0$ 是极小值点, 也是最小值点, 最小值为 1 .

【标注】 【知识点】 直接求函数的最值 (不含参)

9. 函数 $f(x) = 3x - 4x^3$, $(x \in [0, 1])$ 的最大值是 () .

A. $\frac{1}{2}$

B. -1

C. 0

D. 1

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = 3x - 4x^3$ 的导数为 $f'(x) = 3 - 12x^2 = 3(1 - 4x^2)$,

由 $f'(x) = 0$, 可得 $x = \frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$ 舍去),

$f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 递增, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 递减,

可得 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处取得极大值, 且为最大值 1 .

故选 D.

【标注】 【知识点】 直接求函数的最值 (不含参)

三、 含参函数极值 (不需分类讨论)

10. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2a^2 \ln x (a > 0)$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 求实数 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上没有零点, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 1

(2) $f(x)$ 的单调递增区间为 $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, a)$;

(3) $0 < a < \sqrt{e}$.

【解析】 (1) $f(x) = x^2 - 2a^2 \ln x (a > 0)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = 2x - \frac{2a^2}{x} = \frac{2x^2 - 2a^2}{x} = \frac{2(x+a)(x-a)}{x}.$$

$\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值,

$\therefore f'(1) = 0$, 解得 $a = 1$ 或 $a = -1$ (舍).

当 $a = 1$ 时, $x \in (0, 1), f'(x) < 0$; $x \in (1, +\infty), f'(x) > 0$,

经检验 $a = 1$ 符合题意, 所以 a 的值为 1 .

(2) 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = a$ 或 $x = -a$ (舍).

当 x 在 $(0, +\infty)$ 内变化时, $f'(x)$ $f(x)$ 的变化情况如下:

x	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

(3) 要使 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上没有零点, 只需在 $[1, e]$ 上 $f(x)_{\min} > 0$ 或 $f(x)_{\max} < 0$,

由上表知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, a)$.

又 $f(1) = 1 > 0$, 只须在区间 $[1, e]$ 上 $f(x)_{\min} > 0$.

(i) 当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减,

$$f(x)_{\min} = f(e) = e^2 - 2a^2 > 0,$$

解得 $0 < a < \frac{\sqrt{2e}}{2}$ 与 $a \geq e$ 矛盾.

(ii) 当 $1 < a < e$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, a]$ 上单调递减, 在区间 $(a, e]$ 上单调递增,

$$f(x)_{\min} = f(a) = a^2(1 - 2\ln a) > 0,$$

解得 $0 < a < \sqrt{e}$,

所以 $1 < a < \sqrt{e}$.

(iii) 当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(1) > 0$, 满足题意.

综上, a 的取值范围为 $0 < a < \sqrt{e}$.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参二次型导函数)

11. 已知函数 $f(x) = ax^2 + (a-2)x - \ln x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 时取得极值, 求实数 a 的值.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, 求 $f(x)$ 零点的个数.

【答案】(1) $a = 1$.

(2) $0 < a < 1$ 时 $f(x)$ 有两个零点.

【解析】(1) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2ax + (a-2) - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 + (a-2)x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x},$$

由已知, 得 $f'(1) = 0$, 解得 $a = 1$,

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x},$$

所以 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$,

所以 $f(x)$ 减区间为 $(0, 1)$, 增区间为 $(1, +\infty)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 时取得极小值, 其极小值为 $f(1) = 0$, 符合题意,

所以 $a = 1$.

(2) 令 $f'(x) = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x} = 0$, 由 $0 < a < 1$, 得 $x = \frac{1}{a} > 1$,
 所以 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{a}$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{a}$,
 所以 $f(x)$ 减区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$,
 所以函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 时取得极小值, 其极小值为 $f(\frac{1}{a}) = \ln a + 1 - \frac{1}{a}$,
 因为 $0 < a < 1$, 所以 $\ln a < 0$, $\frac{1}{a} > 1$,
 所以 $1 - \frac{1}{a} < 0$, 所以 $f(\frac{1}{a}) = \ln a + 1 - \frac{1}{a} < 0$,
 因为 $f(\frac{1}{e}) = \frac{a}{e^2} + \frac{(a-2)}{e} + 1 > \frac{(a-2)}{e} + 1 = \frac{(a-2+e)}{e}$,
 又因为 $0 < a < 1$, 所以 $a-2+e > 0$. 所以 $f(\frac{1}{e}) > 0$,
 根据零点存在定理, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上有且仅有一个零点,
 因为 $x > \ln x$,
 $f(x) = ax^2 + (a-2)x - \ln x > ax^2 + (a-2)x - x = x(ax + a - 3)$,
 令 $ax + a - 3 > 0$, 得 $x > \frac{3-a}{a}$,
 又因为 $0 < a < 1$, 所以 $\frac{3-a}{a} > \frac{1}{a}$, 所以当 $x > \frac{3-a}{a}$ 时, $f(x) > 0$,
 根据零点存在定理, 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上有且仅有一个零点,
 所以, 当 $0 < a < 1$ 时 $f(x)$ 有两个零点.

【标注】【知识点】函数零点存在定理；判定函数零点所在区间（存在性定理）；零点的个数问题；已知极值情况求函数解析式；利用导数求函数的最值

四、含参函数最值（不需分类讨论）

12. 设函数 $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 若 $y = f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上有最大值, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a \leq 0$, $x \in (0, 1)$, $f(x)$ 单增, $x \in (1, +\infty)$, $f(x)$ 单减;

$0 < \frac{1}{2a} < 1$, $(0, \frac{1}{2a})$, $(1, +\infty)$ 单增, $(\frac{1}{2a}, 1)$ 单减;

$\frac{1}{2a} > 1$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 单增, $(1, \frac{1}{2a})$ 单减;

$a = \frac{1}{2}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增.

(2) 在区间 $(0, 2)$ 有最大值 $-a-1$.

【解析】(1) $f'(x) = 2ax - (2a+1) + \frac{1}{x} (x > 0)$,

$$= \frac{2ax^2 - (2a+1)x + 1}{x},$$

$$= \frac{(2ax-1)(x-1)}{x},$$
 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $\frac{1}{2a}$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单增,

$x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单减.

② $0 < \frac{1}{2a} < 1$ 时, 即 $a > \frac{1}{2}$.

x	$(0, \frac{1}{2a})$	$\frac{1}{2a}$	$(\frac{1}{2a}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

③ $\frac{1}{2a} > 1$ 时, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$,

x	$(0, 1)$	1	$(1, \frac{1}{2a})$	$\frac{1}{2a}$	$(\frac{1}{2a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

④ $\frac{1}{2a} = 1$ 时即 $a = \frac{1}{2}$, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单增.

(2) 由 (1) 知, $f(1) = -a - 1$, $f(2) = \ln 2 - 2$,

则 $f(1) \geq f(2)$ 时, 即 $a \leq 1 - \ln 2$,

$f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上有最大值 $f(1)$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数求函数的最值

五、含参函数极最值问题 (不需分类讨论)

13. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$ 的极值点为 2.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

(3) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最值.

【答案】(1) -8 .

(2) 极小值 $4 - 8 \ln 2$.

(3) $f(x)_{\min} = 4 - 8 \ln 2$, $f(x)_{\max} = \frac{1}{e^2} + 8$.

【解析】(1) $\because f'(x) = 2x + \frac{a}{x}$,

$$\text{且 } f'(2) = 2 \times 2 + \frac{a}{2} = 0,$$

$$\therefore a = -8.$$

$$(2) \because f(x) = x^2 - 8 \ln x, f'(x) = 2x - \frac{8}{x},$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 解出 } x > 2,$$

$$f'(x) < 0, \text{ 解出 } 0 < x < 2.$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减,

在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

$$f(x) \text{ 极小值} = f(2) = 4 - 8 \ln 2.$$

$$(3) \because f(x) \text{ 在 } \left[\frac{1}{e}, 2\right) \text{ 当单调递减},$$

在 $(2, e]$ 上单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(2) = 4 - 8 \ln 2,$$

$$\because f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} + 8,$$

$$f(e) = e^2 - 8 < f\left(\frac{1}{e}\right),$$

$$\therefore f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} + 8.$$

【标注】【知识点】直接求函数的最值(不含参)

14. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 3$ 在 $x = -1$ 时取得极值.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最大值.

【答案】(1) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 3$

(2) -2

【解析】(1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 1$,

因为 $f(x)$ 在 $x = -1$ 时取得极值, 所以 $f'(-1) = 0$,

即 $3 - 2a - 1 = 0$, 解得 $a = 1$.

经检验, $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = -1$ 时取得极小值.

$$\text{所以 } f(x) = x^3 + x^2 - x - 3$$

$$(2) f'(x) = 3x^2 + 2x - 1,$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 解得 } x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{3};$$

$$\text{令 } f'(x) < 0, \text{ 解得 } -1 < x < \frac{1}{3}.$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 和 $(\frac{1}{3}, 1)$ 内单调递增, 在 $(-1, \frac{1}{3})$ 内单调递减,
所以当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 有极大值 $f(-1) = -2$.
又 $f(1) = -2$, $f(-2) = -5$,
所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最大值为 -2 .

【标注】【知识点】直接求函数的最值（不含参）