

极值与最值

一、极值

1. 函数的极值

函数的极值：函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极大值，记作 $y_{\text{极大值}} = f(x_0)$ ；如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极小值，记作 $y_{\text{极小值}} = f(x_0)$ 。

极大值与极小值统称为极值，称 x_0 为极值点。

2. 函数极值的判断与求解

求函数 $y = f(x)$ 极值的方法：

- (1) 确定函数的定义域；
- (2) 求导数 $f'(x)$ ；
- (3) 解出方程 $f'(x) = 0$ 在定义域内的全部实根；
- (4) 检测每个实根左右两侧导函数的符号，进而判断：
 - ①如果在某实根附近导数符号为左负右正，则该实根为极小值点；
 - ②如果在某实根附近导数符号为左正右负，则该实根为极大值点；
 - ③如果在某实根附近导数符号保持不变，则该实根不是极值点。

例1

1. 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \ln x$ 的极值点是()。
A. $x = -1$ B. $x = -\frac{1}{2}$ C. $x = 1$ D. $x = \frac{1}{2}$
2. 函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ ($-2 < x < 2$) 有()。
A. 极大值5，极小值-27 B. 极大值5，极小值-11
C. 极大值5，无极小值 D. 极小值-27，无极大值
3. 对于函数 $f(x) = e^x - \ln x$ ，下列结论正确的一个是()。
A. $f(x)$ 有极小值，且极小值点 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
B. $f(x)$ 有极大值，且极大值点 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
C. $f(x)$ 有极小值，且极小值点 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

D. $f(x)$ 有极大值, 且极大值点 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

4. 设函数 $f(x) = e^x(x-1)^2(x-2)$, 则() .

A. $f(x)$ 有两个极大值点

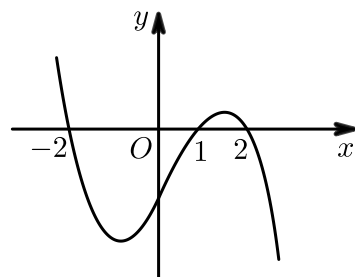
B. $f(x)$ 有两个极小值点

C. $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

D. $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{5}{4x} - \ln x - \frac{3}{2}$, 求函数 $f(x)$ 的极值 .

6. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数 $y = (1-x)f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论中一定成立的是() .



A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

练1

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 9$ 的极大值点为() .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

8. $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值点为 _____ .

二、最值

1. 最值的判断与求解

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下:

(1)求 $f(x)$ 在 (a, b) 内的极值;

(2)将 $f(x)$ 的各极值与 $f(a)$, $f(b)$ 比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

例1

9. 设函数 $f(x) = x \ln x$, $x \in [e^{-2}, e]$, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____, 最小值为 _____ .

练1

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 5]$ 上的最小值为 _____ , 最大值为 _____ .
11. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值是 () .
A. -2 B. 0 C. 2 D. 4
12. 函数 $y = x^4 - 4x + 3$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最小值为 () .
A. 72 B. 36 C. 12 D. 0

2. 极值与最值的关系

【注意】极值和最值的区别与联系：

- (1) 极值只是对一点附近而言，是局部最值；而最值是对整个区间或是对所考察问题的整体而言；
- (2) 极值和最值都不一定存在；
- (3) 函数在一个区间上若存在最大值或最小值，则最大值或最小值只能各有一个，具有唯一性，而函数的极值可能不止一个，也可能没有；
- (4) 极值点不一定是极值点，最值点也不一定是极值点，但如果连续函数在开区间 (a, b) 内只有一个极值点，那么极大值就是最大值，极小值就是最小值，此区间也可以是无穷区间。

例2

13. 下列结论正确的是 () .
- A. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的极大值点，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值
 - B. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的极小值点，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值
 - C. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上唯一的极大值点，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值
 - D. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上唯一的极大值点，且 $f(x_0)$ 在 (a, b) 上无极小值点，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的最大值
14. 对于函数 $f(x) = (2x - x^2)e^x$
- (1) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的单调递减区间；
 - (2) $f(-\sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的极小值， $f(\sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的极大值；
 - (3) $f(x)$ 有最大值，没有最小值；
 - (4) $f(x)$ 没有最大值，也没有最小值。
- 其中判断正确的是 _____ .

练2

15. 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[-3, +\infty)$ 上的最值 .

三、含参函数的极值与最值（不需要分类讨论）

1. 含参函数极值问题

例1

第一题【教师备注】

注意：图像为函数**导函数**的图像！

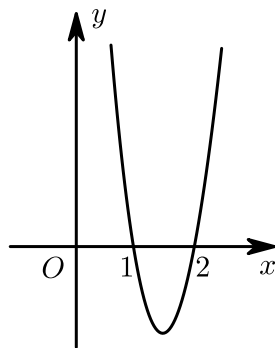
第一问：由导函数图像可知函数的单调性，从而确定函数在 $x=1$ 处取得极大值。

第二问：此题可列三个等式——

由导函数图像可知分别为 $f'(1) = 0, f'(2) = 0$;

由极大值为5可知 $f(1) = 5$ 。

16. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点 x_0 处取得极大值5，其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(1, 0)$ ， $(2, 0)$ ，如图所示。求：



- (1) x_0 的值.
- (2) a, b, c 的值 .

第二题【教师备注】

切线问题第一步一定要确定切点，此题题干表述：**在点 $(1, f(1))$ 处切线**，可知切点为 $(1, f(1))$ 。

确定切点后即可求出切线斜率，继而利用点斜式求出切线方程。

17. 设 $f(x) = a(x-5)^2 + 6\ln x$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, 6)$.
- (1) 确定 a 的值 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值 .

第三题【教师备注】

由题干 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值-2可得到两个等式： $g'(1) = 0, g(1) = -2$

但是一定要注意检验由 $g'(1) = 0$ 得出的参数值是否符合在 $x = 1$ 处取得极值的要求，因此，求解后一般需要检验，为了保证严谨，最好在求完参数值后，补充一句：

“经检验，参数值_____符合要求”

18. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + x - k$, $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x = 1$ 时， $g(x)$ 取得极值-2.

求函数 $g(x)$ 的单调区间和极大值；

练1

19. 设函数 $f(x) = x - a \ln x + \frac{b}{x}$ 在 $x = 1$ 处取得极值.

求 a 与 b 满足的关系式.

2. 含参函数最值问题

例2

20. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ ，试问是否存在实数 a, b ，使 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上取得最大值3，最小值-29，若存在，求出 a, b 的值，若不存在，请说明理由.

练2

21. 已知函数 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + a$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调减区间；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为20，求它在该区间上的最小值.

3. 含参极值最值问题

例3

22. 已知函数 $y = ax^3 + bx^2$ ，当 $x = 1$ 时，有极大值3.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求函数的极小值.

(3) 求函数在 $[-1, 2]$ 的最值.

23. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + c$ 在点 $x = 2$ 处取得极值 $c - 16$.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 若 $f(x)$ 有极大值28，求 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值.

 练3

24. 已知函数 $f(x) = ax^3 + 3x + 2 (a \in \mathbf{R})$ 的一个极值点是1 .

求函数 $f(x)$ 在 $[-2, 3]$ 上的最大值和最小值 .

25. 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 过曲线 $y = f(x)$ 上的点 $P(1, f(1))$ 的切线方程为 $y = 3x + 1$.

(1) 若 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 时有极值 , 求 $f(x)$ 的表达式 .

(2) 在 (1) 的条件下 , 求 $y = f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值 .