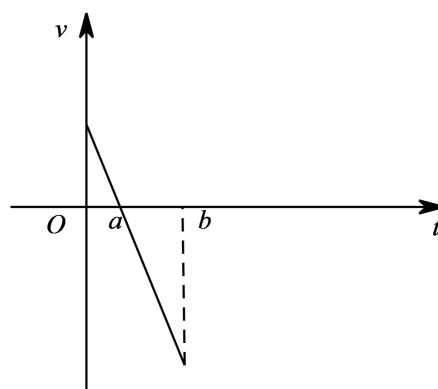
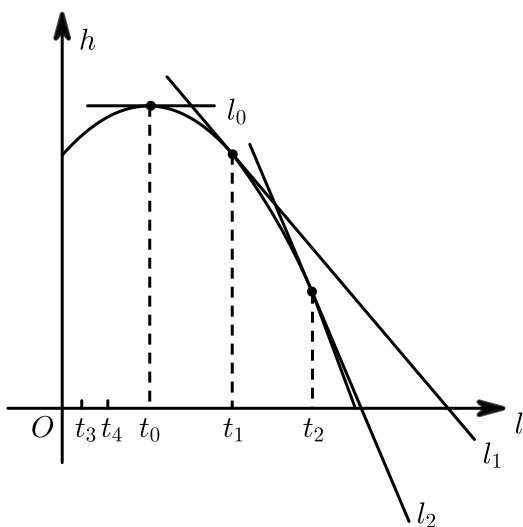


导数的定义与运算

观察：图1表示高台跳水运动员的高度 h 随时间 t 变化的函数 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$ 的图像，图2表示高台跳水运动员的速度 v 随时间 t 变化的函数 $v(t) = h'(t) = -9.8t + 6.5$ 的图像．运动员从起跳到最高点，以及从最高点到入水这两段时间的运动状态有什么区别？



一、导数概念与几何意义

1. 函数的平均变化率

(1) 平均变化率的概念

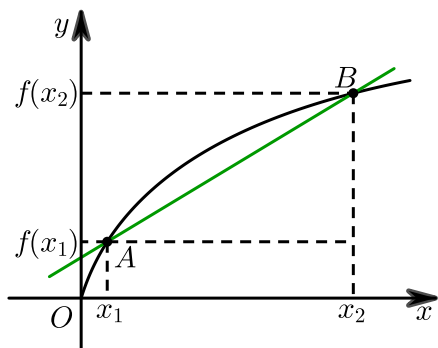
一般地，对于函数 $y = f(x)$ ， x_1 ， x_2 是其定义域内不同的两点，那么函数的变化率可用式子 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 表示，我们把这个式子称为函数 $y = f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率，习惯上用 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示，即平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

上式中 Δx ， Δy 的值可正可负，但 $\Delta x \neq 0$ ． $y = f(x)$ 为常数函数时， $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

(2) 平均变化率的几何意义

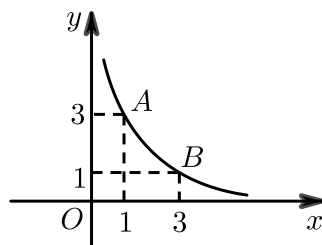
设 $A(x_1, f(x_1))$ ， $B(x_2, f(x_2))$ 是曲线 $y = f(x)$ 上任意不同的两点，函数 $y = f(x)$ 的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ 为割线AB的斜率，如图．



(3)注意自变量与函数值的对应关系，公式中若 $\Delta x = x_2 - x_1$ ，则_____；若 $\Delta x = x_1 - x_2$ ，则_____

例1

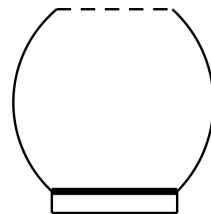
1. 求函数 $f(x) = x^3 - 2x$ 在 $[1, 1 + \Delta x]$ 上的平均变化率.
2. 如图，函数 $y = f(x)$ 在 A, B 两点间的平均变化率是（ ）.

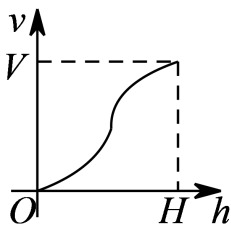
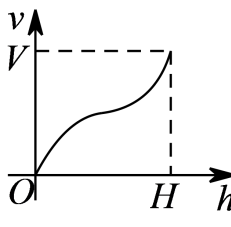


- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

练1

3. 一个高为 H 容积为 V 的鱼缸的轴截面如图所示．现向空鱼缸内注水，直到注满为止．当鱼缸水深为 h 时，水的体积记为 v ．函数 $v = f(h)$ 的大致图象可能是（ ）.



- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

练2

8. 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数为() .

- A. $f'(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]$
C. $f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
D. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

🔗 可导与导函数

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都是可导的, 则 $f(x)$ 称在区间 (a, b) 可导

3. 导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义:

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

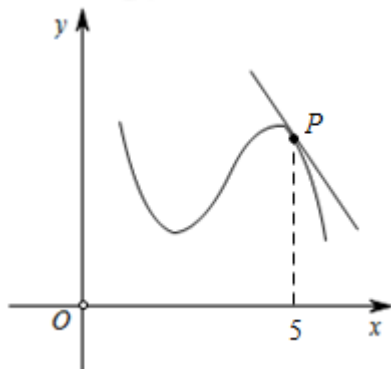
【重点1】当 $f'(x) > 0$ 时, 切线向上方向与 x 轴正向的夹角为锐角; 当 $f'(x) < 0$ 时, 切线向上方向与 x 轴正向的夹角为钝角; 当 $f'(x_0) = 0$ 时, 切线与 x 轴平行(或重合); 当 $f'(x_0)$ 不存在且切线存在时, 切线与 y 轴平行(或重合).

【重点2】若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则图象在 $(x_0, f(x_0))$ 处一定有切线, 但若函数在 $x = x_0$ 处不可导, 则图象在 $(x_0, f(x_0))$ 处也可能有切线, 如函数 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 处不可导, 但其函数图象在 $x = 0$ 处的切线是 y 轴, 即若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数不存在, 但图象在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线, 则切线与 x 轴垂直.

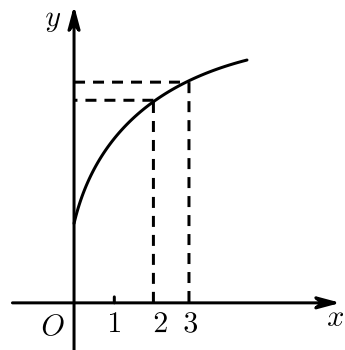
🔗 图像

🔗 例3

9. 如图, 函数 $y = f(x)$ 的图像在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 8$, 则 $f(5) + f'(5) = \underline{\hspace{2cm}}$.



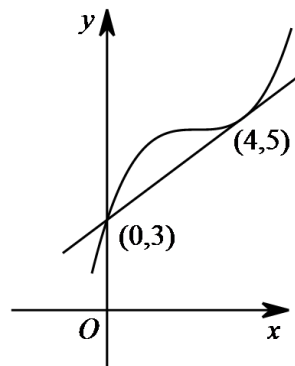
10. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 下列数值排序正确的是 ()



- A. $0 < f'(2) < f'(3) < f(3) - f(2)$
- B. $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$
- C. $0 < f'(3) < f'(2) < f(3) - f(2)$
- D. $0 < f(3) - f(2) < f'(2) < f'(3)$

练3

11. 如图, 直线 l 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 4$ 处的切线, 则 $f'(4) = \underline{\hspace{2cm}}$.



切线斜率计算

例4

12. 函数 $f(x) = ax^2 + bx$ ($a > 0, b > 0$) 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 2, 则 $\frac{8a+b}{ab}$ 的最小值是 ()

- A. 10
- B. 9
- C. 8
- D. $3\sqrt{2}$

练4

13. 已知曲线 $y = \frac{x^2}{4} - 3\ln x + 1$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 () .

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. $\frac{1}{2}$

基本初等函数导数

1. 导数公式表

基本初等函数的导数公式

函数	导数
$f(x) = c$ (c 为常数)	
$f(x) = x^\alpha$ (α 为常数)	
$f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)	
$f(x) = e^x$	
$f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, $x > 0$)	
$f(x) = \ln x$ ($x > 0$)	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	

例1

14. 如果函数 $f(x) = \cos x$, 那么 $f(\frac{\pi}{6}) + f'(\frac{\pi}{6}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

练1

15. 下列结论正确的是 () .

- A. 若 $y = \cos x$, $y' = \sin x$
- B. 若 $y = e^x$, 则 $y' = xe^{x-1}$
- C. 若 $y = \frac{1}{x}$, 则 $y' = -\frac{1}{x^2}$
- D. 若 $y = \sqrt{x}$, 则 $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

三、 四则运算

1. 导数四则运算法则

设两个函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，则有：

两个函数的和的导数	
两个函数的差的导数	
两个函数的积的导数	
两个函数的商的导数	

2. 公式求解

例1

16. 下列函数求导运算正确的个数为 () .

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} (3^x)' = 3^x \log_3 e & \textcircled{2} (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2} & \textcircled{3} (e^x)' = e^x \\ \textcircled{4} \left(\frac{1}{\ln x} \right)' = x & \textcircled{5} (x \cdot e^x)' = e^x + 1 & \end{array}$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

17. 求下列各函数的导数：

(1) $y = 3x^2 - x + 5$;

(2) $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 4\sqrt{3}$;

(3) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2}$;

(4) $y = \frac{1 - x^3}{\sqrt{x}}$;

(5) $y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$;

练1

18. 下列求导运算正确的是 () .

A. $\left(x + \frac{1}{x} \right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$

B. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

C. $(x^2 \cos x)' = -2x \sin x$

D. $\left(\frac{e^x}{x} \right)' = \frac{xe^x + e^x}{x^2}$

3. 赋值运算

例2

19. 已知函数 $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin x$, 则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 _____ .

20. 已知 $f(x) = x^2 + 2xf'(1)$, 则 $f'(0)$ 的值为 () .

A. 0

B. -2

C. 2

D. -4

21. 已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 f'(1) + 3x f'(-1)$, 则 $f(1)$ 的值为 _____ .

练2

22. 已知函数 $f(x) = \sin x + 2x f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ()$.

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 2x f'(e) + \ln x$, 则 $f'(e) = ()$.

A. e

B. -1

C. $-e^{-1}$

D. -e

24. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 2x \cdot f'(1) + \ln x$, 则 $f'(1) = ()$.

A. -e

B. -1

C. 1

D. e

四、复合函数求导

1. 复合函数求导法则

复合函数 $y = f(g(x))$ 的导数和函数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

例1

25. 求下列函数的导数 :

(1) $y = (2x + 3)^2$

(2) $y = e^{1-2x}$

(3) $y = \sin(\omega x + \varphi)$

26. 求下列函数的导数

① $y = e^{2x} \cos(4x - 1)$; ② $y = (2 - 3x) \sin 6x$; ③ $y = e^{-x} \ln(2x + 1)$.

练1

27. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, 则 $f'(2) =$ _____ .

28. 函数 $f(x) = \sin^2 x$ 的导数是 () .

A. $2 \sin x$

B. $2\sin^2 x$

C. $2 \cos x$

D. $\sin 2x$