

4线面垂直与面面垂直

一、线面垂直

1. 线面垂直定义

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直，记作 $l \perp \alpha$ ．直线 l 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫做直线 l 的垂面．直线与平面垂直时，它们惟一的公共点 P 叫做垂足．

2. 线面垂直判定定理

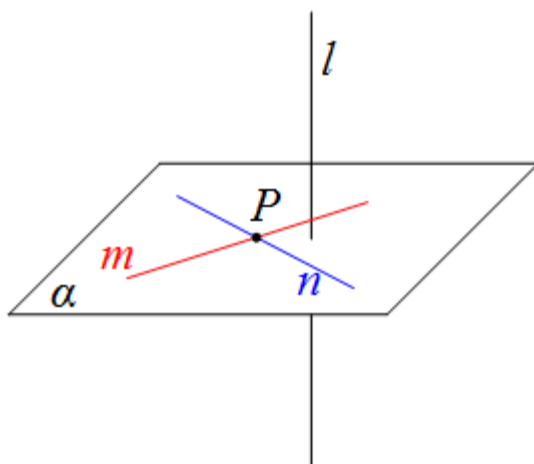
一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直．

【补充说明】

- (1) 定理中的“两条相交直线”这一条件不可忽视．请结合图形自行举出反例；
- (2) 根据判定定理的描述，可以将线面垂直的证明分解为证明两次线线垂直，这种转化的数学思想又再次体现出来，与将证明面面平行分解为证明两次线面平行的手段有异曲同工之妙．
- (3) 承接上一条分析，既然证明线面垂直等价于证明两次线线垂直，一般来说，判定线线垂直的方法如下：

①对于共面直线的垂直关系，可以利用平面几何中的相关结论和模型去获得，比如菱形的对角线互相垂直平分，比如等腰三角形“三线合一”，比如勾股定理的逆定理等等手段．

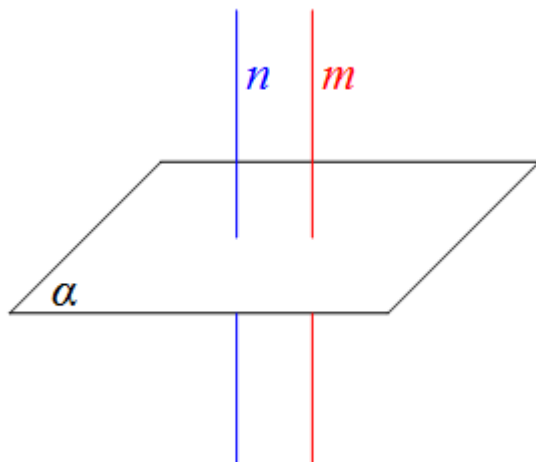
②对于异面直线的垂直关系，我们可以利用下面要学习的线面垂直的性质获得．



$$\begin{cases} l \perp m \\ l \perp n \\ m \in \alpha \wedge n \in \alpha \\ m \cap n = P \end{cases} \Rightarrow l \perp \alpha .$$

3. 线面垂直的性质定理

垂直于同一个平面的两条直线平行 .



$$\begin{cases} m \perp \alpha \\ n \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow m \parallel n .$$

【补充说明】

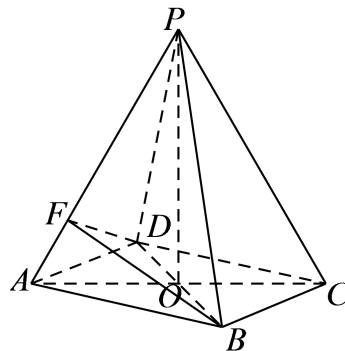
(1) 线面垂直的性质定理给出了我们另外一种全新的判断两条直线平行的方法，这种由“垂直”关系推导“平行”关系的情况并不多见；

(2) 从平面外一点引一个平面的垂线，这个点和垂足之间线段的长，叫做点到平面的距离；在求解多面体体积的时候，关键是确定多面体的高（多面体的高参看点到平面的距离），那么我们可以利用线面垂直的性质定理进行等高转化，进而能够利用等体积法换底也说不定。

🧠 典型例题

|| 线面垂直的判定

1. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC \cap BD = O$ ， $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形， $PB = PD = \sqrt{6}$ ， $AP = 4AF$ 。



求证： $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 因为底面 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$,

所以 O 为 AC, BD 中点 .

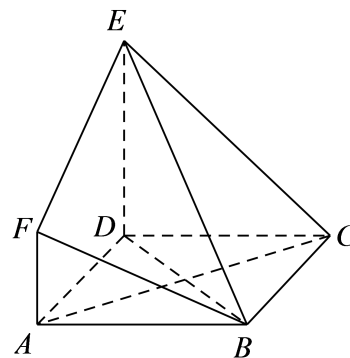
又因为 $PA = PC, PB = PD$,

所以 $PO \perp AC, PO \perp BD$,

所以 $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

【标注】 【知识点】 向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

2. 如图, $ABCD$ 是边长为3的正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AF \parallel DE$, $DE = 3AF$, 直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° .



求证: $AC \perp$ 平面 BDE .

【答案】 (1) 见解析 .

【解析】 (1) 证明: $\because DE \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore DE \perp AC$.

$\because ABCD$ 是正方形,

$\therefore AC \perp BD$,

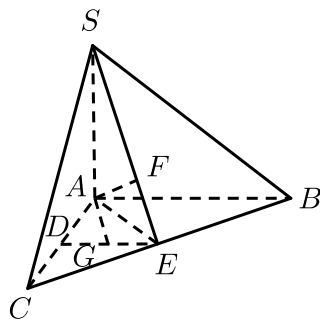
$\because DE \cap BD = D$,

$\therefore AC \perp$ 平面 BDE .

【标注】 【知识点】 向量法解决二面角问题；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题

3.

如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中， $SA \perp$ 底面 ABC ， $AC = AB = SA = 2$ ， $AC \perp AB$ ， D ， E 分别是 AC ， BC 的中点， F 在 SE 上，且 $SF = 2FE$ 。



求证： $AF \perp$ 平面 SBC 。

【答案】 (1) 证明见解析。

【解析】 (1) 方法一：证明如下：

由(1)可知： $BC \perp$ 面 SAE ，又 $AF \subset$ 面 SAE ，故 $BC \perp AF$ ，

又由(1)知： $AE = \sqrt{2}$ ， $EF = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $AF = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，又由 $AF^2 + EF^2 = AE^2$ ，

故 $AF \perp EF$ ，

又 $BC \cap EF = E$ ， $BC \subset$ 面 SBC ， $EF \subset$ 面 SBC ，

故 $AF \perp$ 面 SBC 。

方法二：由(1)知 $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ， $B(2, 0, 0)$ ， $C(0, 2, 0)$ ， $S(0, 0, 2)$ ，

则 $\overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{SB} = (2, 0, -2)$ ，

设面 SBC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{SB} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0 \\ 2x_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}$$

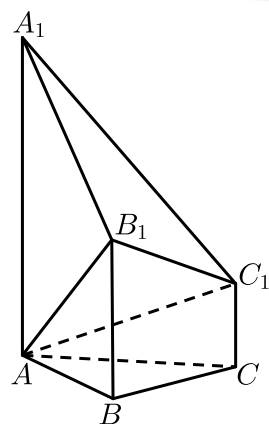
令 $x_1 = 1$ ，则 $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ ，

由 $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\vec{n}_1$ ，可知 $\overrightarrow{AF} \perp$ 面 SBC ，

即 $AF \perp$ 面 SBC 。

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

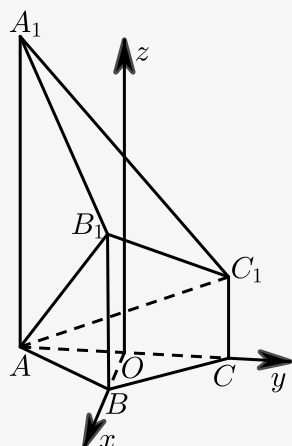
4. 如图，已知多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ ， A_1A ， B_1B ， C_1C 均垂直于平面 ABC ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $A_1A = 4$ ， $C_1C = 1$ ， $AB = BC = B_1B = 2$ 。



证明： $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 如图 ,



以 AC 的中点为 O 为原点 ,
分别以射线 OB , OC 为 x , y 轴的正半轴 ,
建立空间直角坐标系 $O - xyz$,

由题意知各点坐标如下 :

$A(0, -\sqrt{3}, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $A_1(0, -\sqrt{3}, 4)$, $B_1(1, 0, 2)$, $C_1(0, \sqrt{3}, 1)$,

因此 $\overrightarrow{AB_1} = (1, \sqrt{3}, 2)$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (1, \sqrt{3}, -2)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (0, 2\sqrt{3}, -3)$,

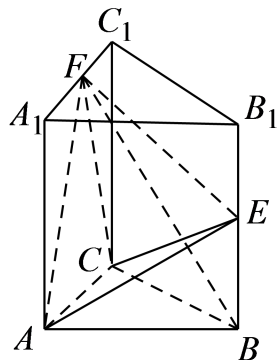
由 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0$ 得 , $AB_1 \perp A_1B_1$,

由 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0$ 得 , $AB_1 \perp A_1C_1$,

所以 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = \sqrt{6}$, 点 E, F 分别为侧棱 BB_1 和边 A_1C_1 的中点.



求证: $BF \perp$ 平面 ACE .

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 取 AC 中点 O , 连接 OF, OB .

则有 $A_1A \parallel FO$, 故 $FO \perp$ 面 ABC .

在正三角形 ABC 中, O 是 AC 中点.

$\therefore OB \perp AC$.

$OA = OC = 1$, $OB = \sqrt{3}$.

以 O 为原点, 分别以 OA, OB, OF 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系.

则 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $E\left(0, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

$F(0, 0, \sqrt{6})$.

$\therefore \overrightarrow{FB} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$, $\overrightarrow{AE} = \left(-1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 0)$,

$\overrightarrow{AF} = (-1, 0, \sqrt{6})$,

$\therefore \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

$\therefore FB \perp AE$.

又 $\therefore \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \therefore FB \perp AC$.

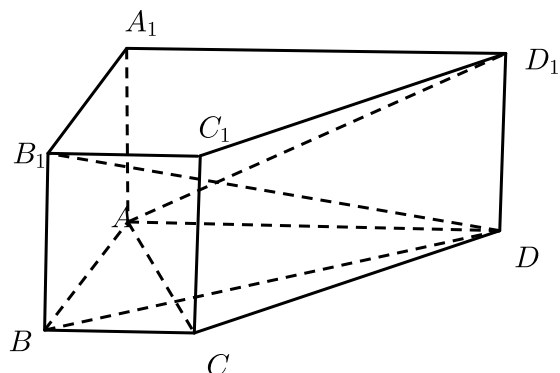
又 $\therefore AE \cap AC = A$.

$\therefore FB \perp$ 面 ACE .

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定; 线面垂直的证明问题; 向量法解决线面角问题; 向量法解决空间中的平行问题; 向量法解决二面角问题

异面直线垂直的判定

6. 如图，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $BB_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AC \perp BD$ 。



求证： $AC \perp B_1D$ 。

【答案】 (1) 证明见解析。

【解析】 (1) 证明：因为 $BB_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AC \subset$ 底面 $ABCD$ ，

所以 $BB_1 \perp AC$ 。

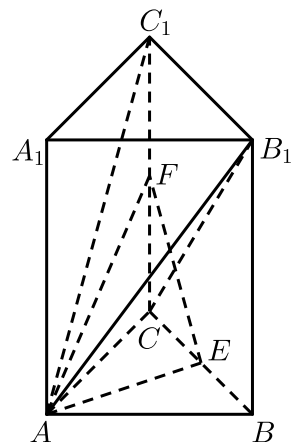
又因为 $AC \perp BD$ ， $BB_1 \cap BD = B$ ，

所以 $AC \perp$ 平面 BB_1D 。

又因为 $B_1D \subset$ 平面 BB_1D ，所以 $AC \perp B_1D$ 。

【标注】 【知识点】直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；直线和平面垂直的判定；直线和平面垂直的性质；线面垂直的证明问题

7. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $BB_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AC = AB = 2$ ， $AA_1 = 2\sqrt{2}$ ， E 、 F 分别是 BC 、 C_1C 的中点。



求证： $AE \perp B_1C$ 。

【答案】 (1) 证明见解析

【解析】 (1) $\because AB = AC$, E 为 BC 中点,

$$\therefore AE \perp BC,$$

$$\because BB_1 \perp AE,$$

$$BC \cap BB_1 = B,$$

$$\therefore AE \perp \text{面 } BB_1C_1C,$$

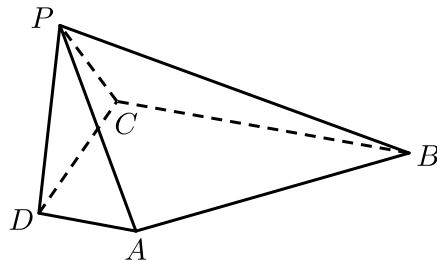
$$\therefore AE \perp B_1C.$$

【标注】【知识点】直线和平面垂直的性质；直线和平面垂直的判定；线线垂直的证明问题；线面垂直的证明问题；空间几何体的体积；等体积法

课堂巩固

线面垂直的判定

8. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \perp \text{平面 } PDC$, $AD \parallel BC$, $PD \perp PB$, $AD = 1$, $BC = 3$, $CD = 4$, $PD = 2$.



求证: $PD \perp \text{平面 } PBC$.

【答案】 (1) 证明见解析.

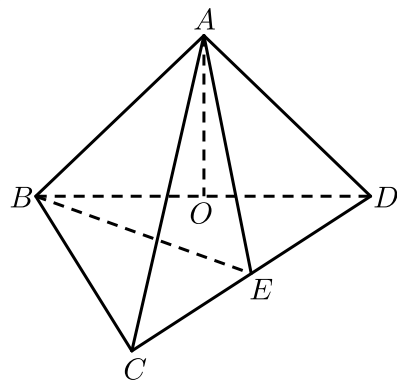
【解析】 (1) 因为 $AD \perp \text{平面 } PDC$, $PD \subset \text{平面 } PDC$, 所以 $AD \perp PD$,

又因为 $BC \parallel AD$, 所以 $PD \perp BC$,

又 $PD \perp PB$, $PB \cap BC = B$, 所以 $PD \perp \text{平面 } PBC$.

【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；直线和平面垂直的判定；直线和平面垂直的性质；线面垂直的证明问题；几何法求空间角；垂直的探索性问题

9. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 顶点 A 在底面 BCD 上的射影 O 在棱 BD 上, $AB = AD = \sqrt{2}$, $BC = BD = 2$, $\angle CBD = 90^\circ$, E 为 CD 的中点.



求证： $AD \perp$ 平面 ABC .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because$ 顶点 A 在底面 BCD 上的射影 O 在棱 BD 上 ,

$\therefore$ 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD .

$\because \angle CBD = 90^\circ$,

$\therefore BC \perp BD$.

$\because$ 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$,

$\therefore BC \perp$ 平面 ABD , $AD \subset$ 面 ABD ,

$\therefore BC \perp AD$.

由 $AB = AD = \sqrt{2}$, $BD = 2$, 得 $BD^2 = AB^2 + AD^2$,

$\therefore AD \perp AB$.

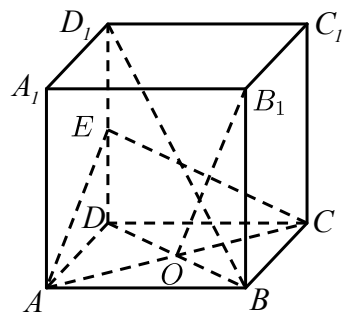
$\because AB \cap BC = B$,

$\therefore AD \perp$ 平面 ABC .

【标注】 【知识点】直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；向量法求空间距离；向量法解决二面角问题

|| 异面直线垂直的判定

10. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 , E 为棱 DD_1 的中点 , 底面对角线 AC 与 BD 相交于点 O .



求证： $BD_1 \perp AC$.

【答案】(1) 证明见解析 .

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形 ,

$$\therefore AC \perp BD ,$$

又 $\because DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore DD_1 \perp AC .$$

$$\text{又} \because DD_1 \cap BD = D ,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面} DBD_1 ,$$

又 $\because BD_1 \subset$ 平面 DBD_1 ,

$$\therefore AC \perp BD_1 .$$

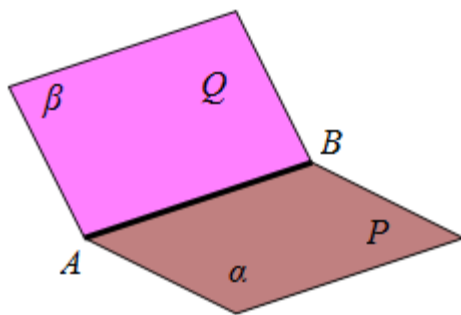
【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；线线垂直的证明问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

二、面面垂直

1. 面面垂直的定义

二面角的定义

如下图：

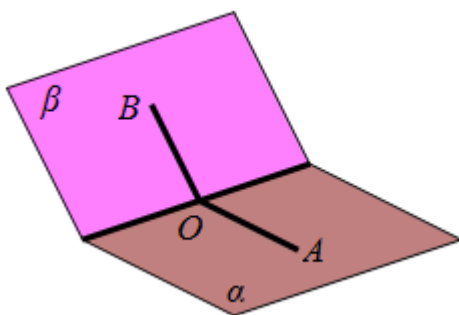


从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角 . 这条直线叫做二面角的棱 , 这两个半平面叫做二面角的面 . 棱为 AB 、面分别为 α , β 的二面角记作二面角 $\alpha - AB - \beta$. 有时为了方便 , 也可在 α , β 内 (棱以外的半平面部分) 分别取点 P , Q , 将这个二面角记作二面角 $P - AB - Q$. 如果棱记作 l , 那么这个二面角记作二面角 $\alpha - l - \beta$ 或 $P - l - Q$.

【备注】平面内的一条直线把平面分成两部分 , 这两部分通常称为半平面 .

二面角的度量

如下图：



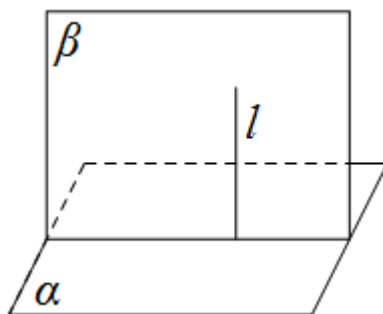
在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱 l 上任取一点 O ，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB ，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角。

面面垂直的定义

一般地，如果两个平面所成的二面角大小为 90° ，我们称这两个平面垂直。

2. 面面垂直判定定理

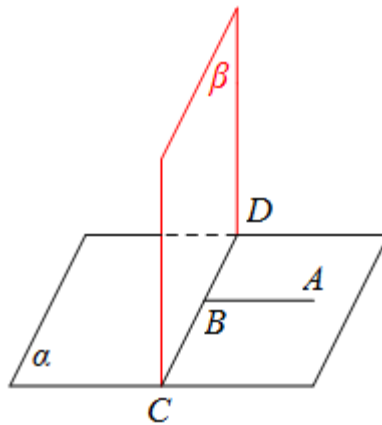
一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直。



$$\begin{cases} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

3. 面面垂直性质定理

两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直。



$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = CD \\ AB \subset \alpha \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp \beta.$$

【补充说明】

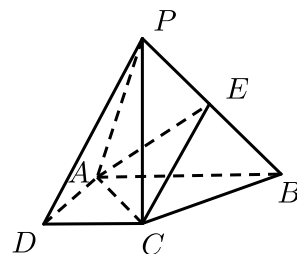
(1) 平面与平面垂直的判定定理说明，可以通过直线与平面垂直判定平面与平面垂直；而平面与平面垂直的性质定理说明，可以通过平面与平面垂直得到直线与平面垂直。这种直线与平面的位置关系同平面与平面的位置关系的相互转化，是解决空间图形问题重要的思想方法；

(2) 在应用平面与平面垂直的性质定理时，一般需要引入辅助线，即过一个平面内一点作交线的垂线，这样将面面垂直转化为线面垂直或线线垂直。

典型例题

面面垂直的判定

11. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PC \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2AD = 2CD$ ， $PC = 4$ ， E 为线段 PB 上一点。



求证：平面 $EAC \perp$ 平面 PBC 。

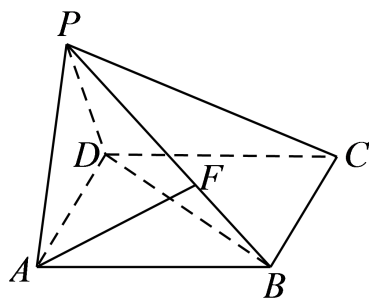
【答案】(1) 证明见解析。

【解析】(1) $\because$ 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PC \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2AD = 2CD$ ， $PC = 4$ ， E 为线段 PB 上一点。

$$\begin{aligned}
&\therefore AC \perp PC, AC = BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\
&\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2, \\
&\therefore AC \perp BC, \\
&\therefore PC \cap BC = C, \\
&\therefore AC \perp \text{平面} PBC, \\
&\therefore AC \subset \text{平面} EAC, \\
&\therefore \text{平面} EAC \perp \text{平面} PBC.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】面面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；平面和平面垂直的判定

12. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 的边长 2 是的是为正方形． $PA = PD$ ， $PA \perp PD$ ， F 为 PB 上的点，且 $AF \perp \text{平面} PBD$ ．



求证：平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ．

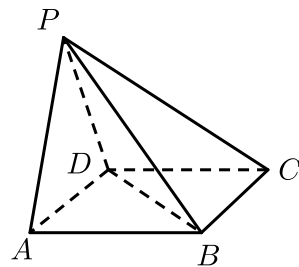
【答案】（1）证明见解析．

【解析】（1） $\because ABCD$ 是正方形 $\therefore AB \perp AD$ ，
 又 $PD \perp AB$ ， $AD \cap PD = D$ ．
 $\therefore AB \perp \text{平面} PAD$ ．
 $\because AB \subset \text{平面} ABCD$ ．
 $\therefore \text{平面} PAD \perp \text{平面} ABCD$ ．

【标注】【知识点】几何法求空间角；线线垂直的证明问题；直线和平面垂直的性质；直线和平面垂直的判定；平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题

面面垂直的性质

13. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 PAD 是正三角形，且平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ．



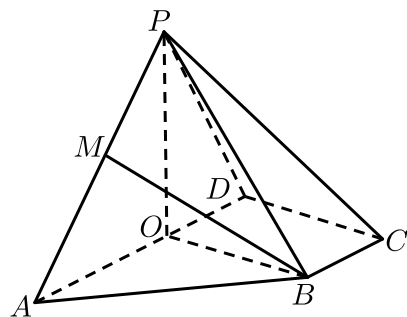
求证： $AB \perp$ 平面 PAD .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because$ 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$,
 $\text{又} \because$ 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,
 $\text{又} \because$ 底面 $ABCD$ 为正方形 ,
 $\therefore AB \perp AD$,
 $\therefore AB \perp$ 平面 PAD .

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；点、直线、平面之间的位置关系；几何法求空间角

14. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $\angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $BC = 1$ ， $CD = \sqrt{3}$ ， $PD = 2$ ， $\angle PDA = 60^\circ$ ， $\angle PAD = 30^\circ$ ，且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，在平面 $ABCD$ 内过 B 作 $BO \perp AD$ ，交 AD 于 O ，连 PO .



求证： $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

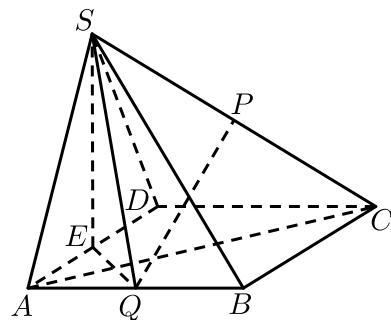
【解析】 (1) 过点 B 作 $BO \perp AD$ ，交 AD 于 O ，连接 PO ，四边形 $BODC$ 为矩形，
 在 $\triangle PDO$ 中， $PD = 2$ ， $DO = BC = 1$ ， $\angle PDA = 60^\circ$ ，
 $\therefore PO = \sqrt{PD^2 + OD^2 - 2PD \cdot OD \cos 60^\circ} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore PO^2 + DO^2 = PD^2 \Rightarrow PO \perp AD$,
 且平面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, AD 为交线 ,
 $PO \subset$ 面 PAD ,
 $\therefore PO \perp$ 面 $ABCD$.

【标注】 **【知识点】** 向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

|| 面面垂直与线面垂直综合

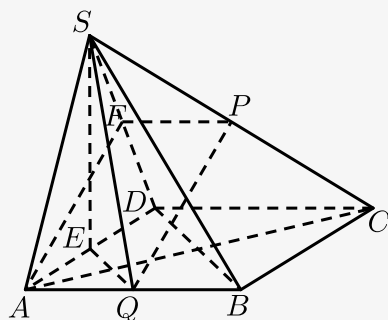
15. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ，平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $SA = SD$ ， E, P, Q 分别是棱 AD, SC, AB 的中点。



求证： $AC \perp$ 平面 SEQ .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 连接 BD ,



$\because \triangle SAD$ 中， $SA = SD$ ， E 为 AD 中点，
 $\therefore SE \perp AD$,
 又 $\because SE \subset$ 平面 SAD ，平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore SE \perp$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore SE \perp AC$,
 $\because$ 底面 $ABCD$ 为菱形， AC, BD 为对角线，
 $\therefore BD \perp AC$ ， $EQ \parallel BD$,

$\therefore EQ \perp AC$ 且 $EQ \cap SE = E$,

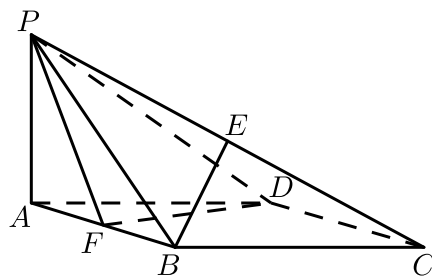
所以, $AC \perp$ 平面 SEQ .

【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；几何法求空间角；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题

课堂巩固

面面垂直的判定

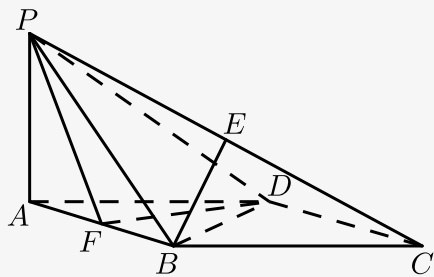
16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, $PA = 1$. $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 是 PC 的中点, F 是 AB 的中点.



求证: 平面 $PDF \perp$ 平面 PAB .

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1)



连接 BD , 得 $\triangle ABD$ 为等边三角形,

又 $\because F$ 为 AB 中点,

$\therefore DF \perp AB$,

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp DF$,

$\because$ 由 $PA \cap AB = A$,

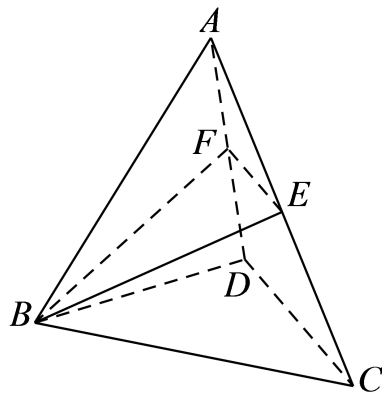
$\therefore DF \perp$ 平面 PAB ,

$\because DF \subset$ 平面 PDF ,

$\therefore$ 平面 $PDF \perp$ 平面 PAB .

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；直线和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定；几何法求空间角；向量法解决空间中的平行问题

17. 如图，在四面体 $ABCD$ 中， $BA = BD$ ， $AD \perp CD$ ，点 E 、 F 分别为 AC 、 AD 的中点．



求证：平面 $EFB \perp$ 平面 ABD ．

【答案】（1）证明见解析．

【解析】（1）在 $\triangle ACD$ 中， $AD \perp CD$ ， $EF \parallel CD$ ，

$$\therefore EF \perp AD,$$

$\because$ 在 $\triangle ABD$ 中， $BA = BD$ ， F 为 AD 的中点，

$$\therefore BF \perp AD,$$

$\because EF \subset$ 平面 EFB ， $BF \subset$ 平面 EFB ，且 $EF \cap BF = F$ ，

$$\therefore AD \perp \text{平面} EFB,$$

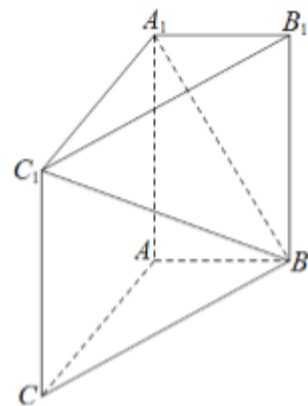
$\because AD \subset$ 平面 ABD ，

$$\therefore \text{平面} EFB \perp \text{平面} ABD.$$

【标注】【知识点】平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；几何法求空间角；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定

|| 面面垂直的性质

18. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， AA_1C_1C 是边长为4的正方形，平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C ， $AB = 3$ ， $BC = 5$ ．



求证： $AA_1 \perp$ 平面 ABC .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 证明： $\because AB^2 + AC^2 = 25 = BC^2$.

$\therefore AB \perp AC$, 而面 $ABC \perp$ 面 AA_1C_1C , 面 $ABC \cap$ 面 $AA_1C_1C = AC$, $AB \subset$ 面 ABC .

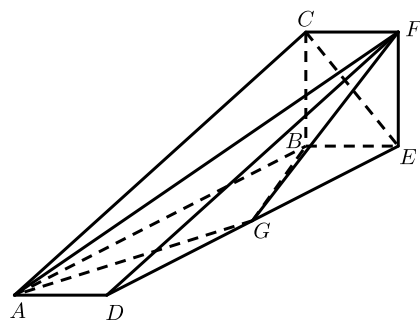
$\therefore AB \perp$ 面 AA_1C_1C , 而 $AA_1 \subset$ 面 AA_1C_1C .

$\therefore AB \perp AA_1$, 而 $AA_1 \perp AC$, $AA_1 \cap AB = A$, AA_1 、 $AB \subset$ 面 ABC .

$\therefore AA_1 \perp$ 面 ABC .

【标注】 【知识点】 向量法解决二面角问题

19. 如图，三棱柱 $ABC - DEF$ 的侧面 $BEFC$ 是边长为 1 的正方形，侧面 $BEFC \perp$ 侧面 $ADEB$ ， $AB = 4$ ， $\angle DEB = 60^\circ$ ， G 是 DE 的中点 .



求证： $GB \perp$ 平面 $BEFC$;

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because G$ 为 DE 中点， $DE = 4$ ， $BE = 1$ ， $\therefore GE = 2$ ，则 $\angle GBE = 90^\circ$ ，即 $GB \perp BE$ ，又 $\because$ 平面 $BEFC \perp$ 平面 $ADEB$ ， $BC \subset$ 平面 $BEFC$ ， $\therefore BC \perp$ 平面 $ADEB$ ， $\therefore$

$GB \subset \text{平面} ADEB$, 则 $BC \perp GB$, 即 $\begin{cases} GB \perp BE \\ GB \perp BC \end{cases}$, 且 $BE \subset \text{平面} BEFC$, $BC \subset \text{平面} BEFC$,
 $\therefore GB \perp \text{平面} BEFC$.

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；几何法求空间角；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题