

# 3线面平行与面面平行

## 一、线面平行

### 1. 线面平行判定定理

【定理】平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行。

上述定理通常称为直线与平面平行的判定定理，它的符号表示如下：
$$\begin{cases} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \Rightarrow a // \alpha . \\ a // b \end{cases}$$

【补充说明】

(1) 定理告诉我们，可以通过直线间的平行，推证直线与平面平行。今后要证明一条已知直线与一个平面平行，只要在这个平面内找出一条直线与已知直线平行，就可断定已知直线与这个平面平行。这是处理空间位置关系一种常用方法，即将直线与平面平行关系（空间问题）转化为直线间平行关系（平面问题），这是一种典型的降维思想，可以将空间中的位置关系退化到平面中去，在研究立体几何问题的过程中，这种思想无疑是应用最广泛的。

(2) 鉴于上面的分析，证明线面平行的核心就是寻找直线与直线的平行关系，那么平面几何中能够产生平行关系的模型都会为证明线面平行提供帮助，常见的模型如下：①中位线模型：三角形或梯形的中位线平行于底边②平行四边形的两组对边分别平行③比例模型：利用平行线分线段成比例定理（包括平行线等分线段）的逆定理可以导出平行关系。

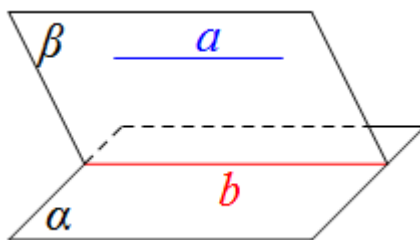
详见下面的例题。

### 2. 线面平行性质定理

【定理】一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行。

【定理】的证明如下：

如下图， $a // \alpha$ ， $a \subset \beta$ ， $\alpha \cap \beta = b$ 。求证： $a // b$ 。



【证明】

因为  $\alpha \cap \beta = b$ , 所以  $b \subset \alpha$ . 又因为  $a \parallel \alpha$ , 所以  $a$  与  $b$  无公共点 (这是线线平行的定义).

又因为  $a \subset \beta, b \subset \beta$ , 所以  $a \parallel b$ .

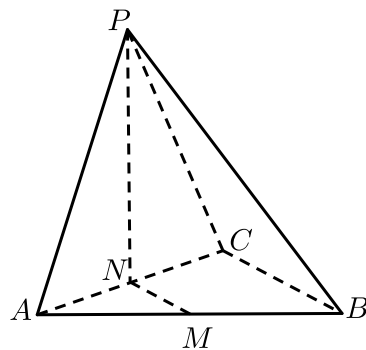
### 【补充说明】

直线与平面平行的性质定理揭示了直线与平面平行中蕴含着直线与直线平行. **通过直线与平面平行得到直线与直线平行, 这给出来一种作平行线的重要方法.**

### 典型例题

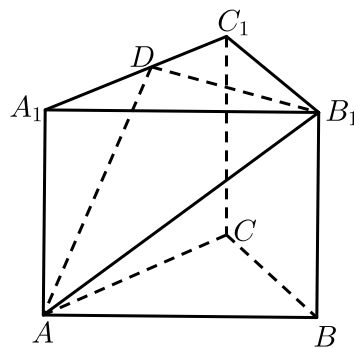
#### 线面平行之中位线模型

1. 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中, 点  $M, N$  分别是棱  $AB, AC$  的中点, 且  $PA = PC, PN \perp AB$ .



求证:  $MN \parallel$  平面  $PBC$ .

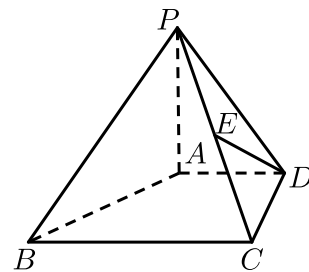
2. 如图所示, 正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的底面边长为 2, 侧棱长为  $\sqrt{3}$ ,  $A_1C_1$  的中点为  $D$ .



求证:  $BC_1 \parallel$  平面  $AB_1D$ .

#### 线面平行之平行四边形模型

3. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \perp CD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $BC = 4$ ,  $PA = AD = CD = 2$ , 点  $E$  为  $PC$  的中点.



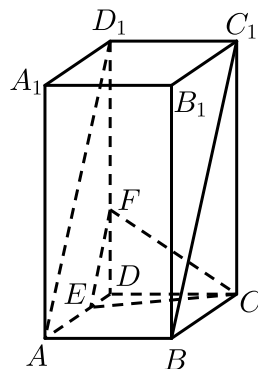
证明： $DE \parallel \text{平面} PAB$  .

### || 线面平行的性质定理

4. 设 $a, b$ 是两条直线,  $\alpha, \beta$ 是两个平面, 若 $a \parallel \alpha, a \subset \beta$ , 且 $\alpha \cap \beta = b$ , 则 $\alpha$ 内与 $b$ 相交的直线与 $a$ 的位置关系是 ( ) .

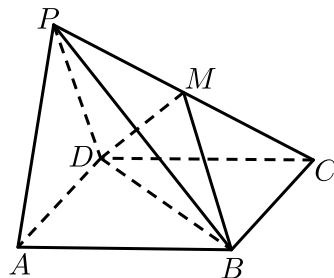
- A. 平行                      B. 相交                      C. 异面                      D. 平行或异面

5. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中底面为边长为3的正方形, 侧棱长为6, 点 $E, F$ 在 $AD, DD_1$ 上 .



若 $EF \parallel \text{平面} ABC_1D_1$ , 证明 $EF \parallel BC_1$  .

6. 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, 面 $PAD \perp \text{面} ABCD$ , 且 $\triangle PAD$ 是边长为2的等边三角形,  $PC = \sqrt{13}$ ,  $M$ 在 $PC$ 上, 且 $PA \parallel \text{面} MBD$  .

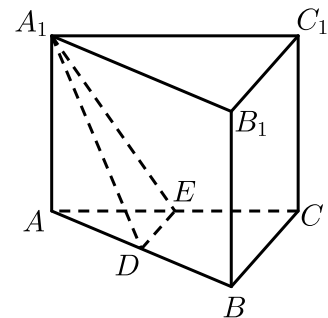


求证： $M$ 是 $PC$ 的中点 .

### 🕒 课堂巩固

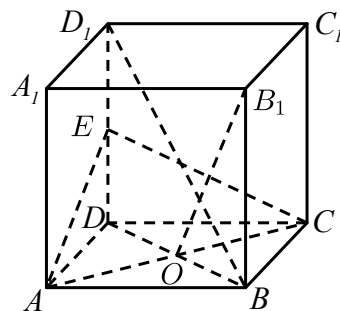
### || 线面平行之中位线模型

7. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,  $BC \perp AC$ ,  $D, E$ 分别是 $AB, AC$ 的中点 .



求证： $B_1C_1 // \text{平面} A_1DE$  .

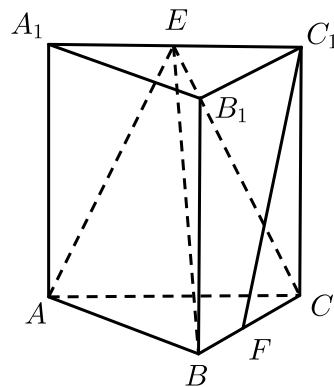
8. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $E$ 为棱 $DD_1$ 的中点，底面对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$  .



求证： $BD_1 // \text{平面} ACE$  .

### || 线面平行之平行四边形模型

9. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧棱垂直于底面， $AB = 4$ ， $BC = 3$ ， $AC = 5$ ， $E$ 为 $A_1C_1$ 的中点， $F$ 为 $BC$ 的中点 .



求证： $C_1F // \text{平面} ABE$  .

### || 线面平行的性质定理

10. 如图，在侧棱垂直底面的四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD // BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = \sqrt{2}$ ， $AD = 2$ ， $BC = 4$ ， $AA_1 = 2$ ， $E$ 是 $DD_1$ 中点， $F$ 是平面 $B_1C_1E$ 与直线 $AA_1$ 的交点 .



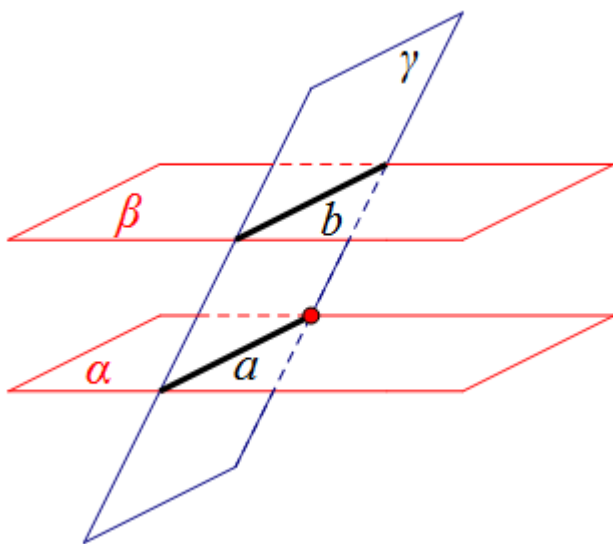
$$\text{【符号表示】} \begin{cases} a \subset \beta \\ b \subset \beta \\ a \cap b = P \Rightarrow \beta // \alpha . \\ a // \alpha \\ b // \alpha \end{cases}$$

上述定理通常称为平面与平面平行的判定定理，它告诉我们，可以由直线与平面平行判定平面与平面平行。

## 2. 面面平行性质定理

【定理】如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行。

【图示】



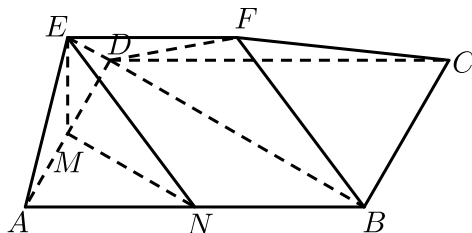
$$\text{【符号表示】} \begin{cases} \alpha // \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \Rightarrow a // b \\ \beta \cap \gamma = b \end{cases}$$

这个定理提供给我们另一种全新的证明直线和直线平行的方法。

### 典型例题

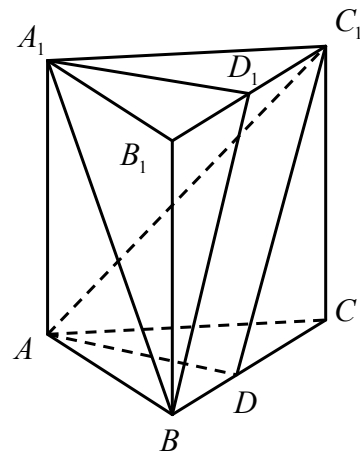
#### 面面平行的判定

12. 已知平行四边形 $ABCD$ 中 $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 2AD = 2$ ，平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$ ，三角形 $AED$ 为等边三角形， $EF // AB$ ， $EF = 1$ ， $M$ ， $N$ 分别为线段 $AD$ ， $AB$ 的中点。



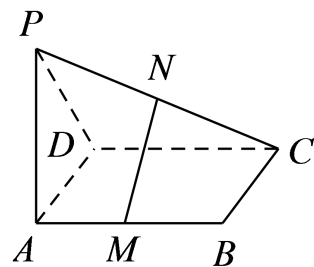
求证：平面 $EMN \parallel$ 平面 $BDF$  .

13. 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $D$ 是 $BC$ 上一点，且 $A_1B \parallel$ 平面 $AC_1D$ ， $D_1$ 是 $B_1C_1$ 的中点．求证：平面 $A_1BD_1 \parallel$ 平面 $AC_1D$  .



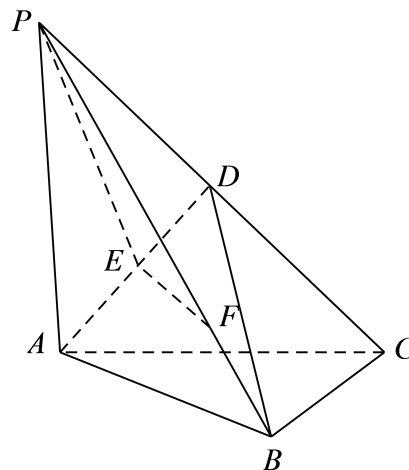
### 面面平行的性质

14. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是矩形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $M$ 、 $N$ 分别是 $AB$ 、 $PC$ 的中点．



求证： $MN \parallel$ 平面 $PAD$  .

15. 如图，在三棱锥 $P - ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABC$ ， $AC \perp BC$ ， $D$ 为 $PC$ 的中点， $E$ 为 $AD$ 的中点，点 $F$ 在线段 $PB$ 上， $PA = AC$  .

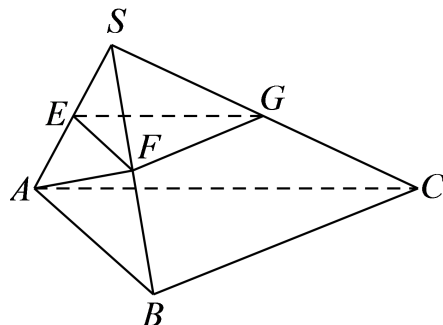


若  $\frac{PF}{PB} = \frac{3}{4}$  , 求证:  $EF \parallel \text{平面} ABC$  .

## 课堂巩固

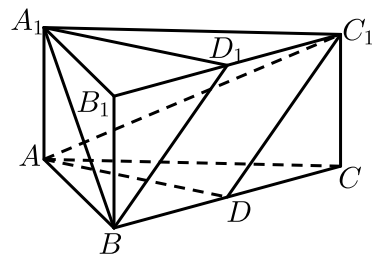
### 面面平行的判定

16. 如图, 在三棱锥  $S-ABC$  中, 平面  $SAB \perp$  平面  $SBC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AS = AB$ . 过  $A$  作  $AF \perp SB$ , 垂足为  $F$ , 点  $E, G$  分别是侧棱  $SA, SC$  的中点. 求证:



平面  $EFG \parallel \text{平面} ABC$  .

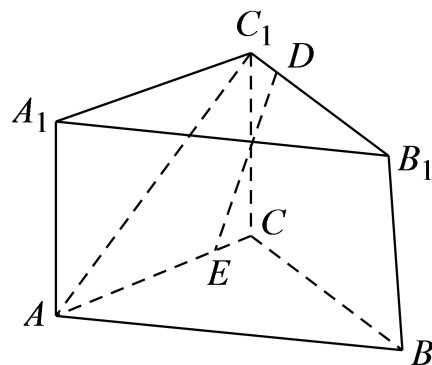
17. 在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB = 2AA_1 = 4$ , 点  $D$  是  $BC$  上一点, 且  $A_1B \parallel \text{平面} AC_1D$ , 点  $D_1$  是  $B_1C_1$  的中点.



求证: 平面  $A_1BD_1 \parallel \text{平面} AC_1D$  .

### 面面平行的性质

18. 如图, 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $CC_1 \perp \text{平面} ABC$ ,  $AC \perp BC$ ,  $D$  在线段  $B_1C_1$  上,  $B_1D = 3DC_1$ ,  $AE = 3EC$ ,  $AC = BC = CC_1 = 4$  .



求证： $DE//$ 平面 $A_1ABB_1$  .