

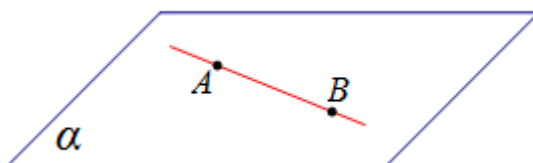
2空间中的位置关系

一、公理体系

1. 公理一

(1) 内容：

如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内（见下图）。



(2) 作用：

此公理的作用时可以判断直线是否在平面内。

(3) 符号表示：

点动成线、线动成面。因此直线、平面都可以看成以点为元素的集合。点 P 在直线 l 上，记作 $P \in l$ ；点 P 在直线 l 外，记作 $P \notin l$ 。如果直线 l 上的所有点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l ，记作 $l \subset \alpha$ ；否则，就说直线 l 在平面 α 外，记作 $l \not\subset \alpha$ 。

这样，公理1就可以用下面的符号语言简化表示：

$$\begin{cases} A \in l \\ B \in l \\ A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{cases} \Rightarrow l \subset \alpha.$$

2. 公理二

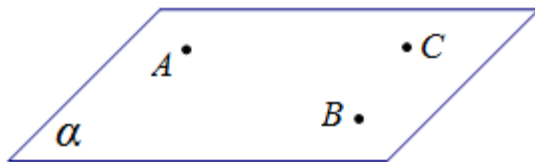
(1) 内容：

过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。

(2) 作用：

公理2刻画了平面特有的基本性质，它给出了确定一个平面的依据：

不在一条直线上（简称为“不共线”）的三个点 A ， B ， C 可以确定一个平面，并且此平面可以记成“平面 ABC ”，如下图。



【补充说明】

由公理2还可以得到如下三个推论：

推论1：经过一条直线和直线外一点有且只有一个平面；

推论2：经过两条相交直线有且只有一个平面；

推论3：经过两条平行直线有且只有一个平面。

典型例题

1. 以下四个命题中，

①不共面的四点中，其中任意三点不共线；

②若点 A 、 B 、 C 、 D 共面，点 A 、 B 、 C 、 E 共面，则点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 共面；

③若直线 a 、 b 共面，直线 a 、 c 共面，则直线 b 、 c 共面；

④依次首尾相接的四条线段必共面。

正确命题的个数是（ ）。

A. 0

B. 1

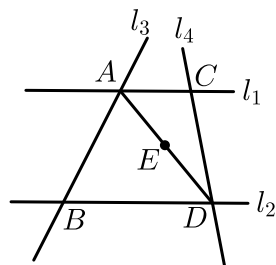
C. 2

D. 3

2. 空间不共面的四个点可以确定 _____ 个平面。

3. 解答：

如图， $l_1 // l_2$ ， l_3 与 l_1 ， l_2 分别交于 A ， B 两点， l_4 与 l_1 ， l_2 分别交于 C ， D 两点， $E \in AD$ ，证明： A ， B ， C ， D ， E 五点共面。



课堂巩固

4. 下列命题正确的是（ ）。

A. 三点确定一个平面

B. 一条直线和一个点确定一个平面

C. 梯形可确定一个平面

D. 圆心和圆上两点确定一个平面

5. 如果一条直线与两条平行直线都相交，那么这三条直线共可确定 _____ 个平面．
6. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 分别为 C_1D_1 ， B_1C_1 的中点， $AC \cap BD = P$ ， $A_1C_1 \cap EF = Q$ ，求证：
 D 、 B 、 F 、 E 四点共面．

3. 公理三

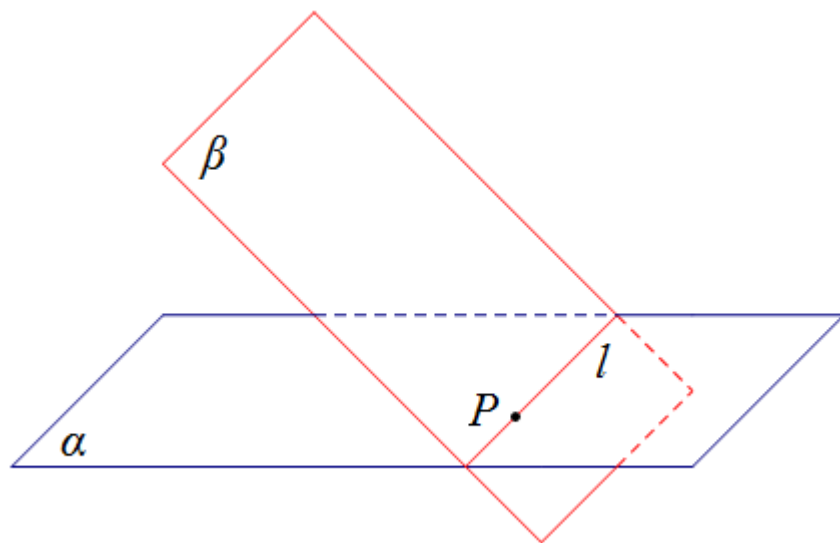
(1) 内容

如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线．

(2) 作用

公理3告诉我们，如果两个不重合的平面有一个公共点，那么这两个平面一定相交，且其交线一定过这个公共点．也就是说，如果两个平面有一个公共点，那么它们必定还有另外一个公共点，只要找出这两个平面的两个公共点，就找出了它们的交线．

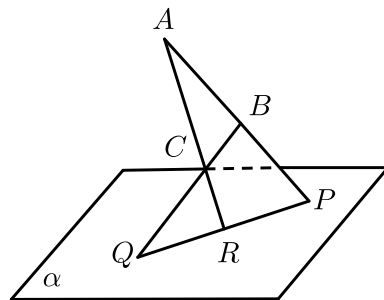
平面 α 与 β 相交于直线 l ，记作 $\alpha \cap \beta = l$ ，如下图．



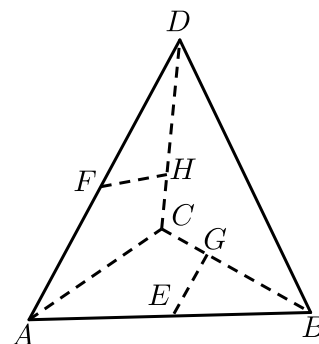
公理3也可以用符号表示： $\begin{cases} P \in \alpha \\ P \in \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cap \beta = l \\ P \in l \end{cases}$ ．

典型例题

7. 已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外， $AB \cap \alpha = P$ ， $AC \cap \alpha = R$ ， $BC \cap \alpha = Q$ ，如图所示．求证： P ， Q ， R 三点共线．



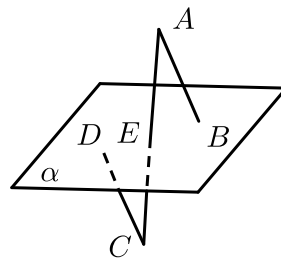
8. 已知：空间四边形 $ABCD$ （如图所示）， E, F 分别是 AB, AD 的中点， G, H 分别是 BC, CD 上的点，且 $CG = \frac{1}{3}BC, CH = \frac{1}{3}DC$ ．求证：



三直线 FH, EG, AC 共点．

课堂巩固

9. 如图， $AB \parallel CD, AB \cap \alpha = B, CD \cap \alpha = D, AC \cap \alpha = E$ ．求证： B, E, D 三点共线．



10. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ， E, F 分别为 D_1C_1, B_1C_1 的中点， $AC \cap BD = P$ ， $A_1C_1 \cap EF = Q$ ．
- (1) 若 A_1C 交平面 $BDEF$ 于点 R ，求证： P, Q, R 三点共线．
- (2) 求证： BF, DE, CC_1 三线共点．

二、直线与直线的位置关系

1. 异面直线

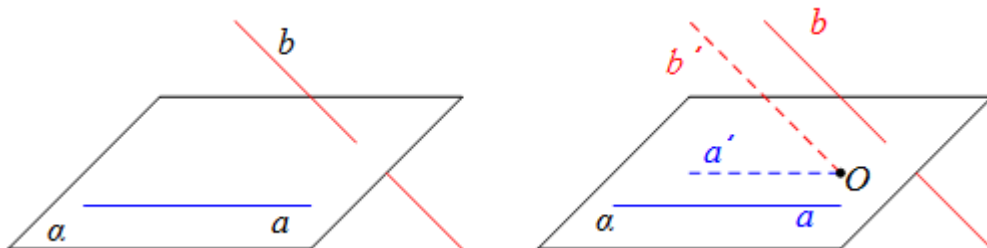


定义

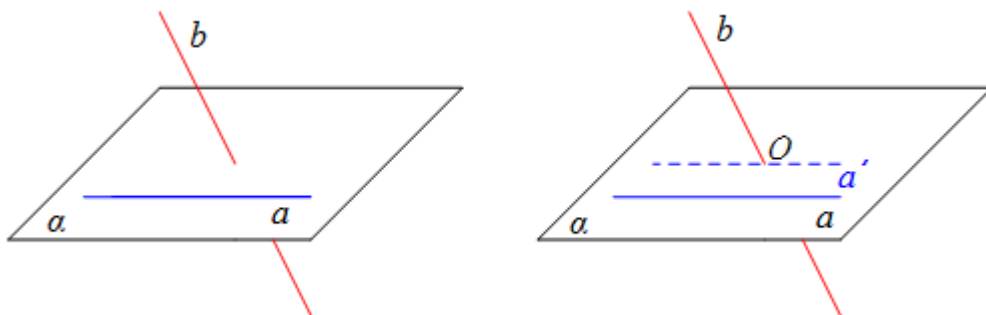
我们把不同在**任何**一个平面内的两条直线叫做**异面直线**。

🔗 夹角

已知两条异面直线 a, b ，经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$ ，我们把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角），记作 $\langle a, b \rangle$ ，见下图：



为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上。例如取在直线 b 上，然后经过点 O 作直线 $a' \parallel a$ ， a' 和 b' 所成的锐角（或直角）就是异面直线 a 与 b 所成的角，如下图：



如果两条异面直线所称的角是直角，那么我们就说这两条直线互相垂直。这条互相垂直的异面直线 a, b ，记作 $a \perp b$ 。

显然，由异面直线夹角的定义，两条异面直线的夹角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 。

2. 空间中直线与直线的位置关系

🔗 共面直线

1. 共面直线：

- (1) 相交直线：同一平面内，有且只有一个公共点。
- (2) 平行直线：同一平面内，没有公共点。

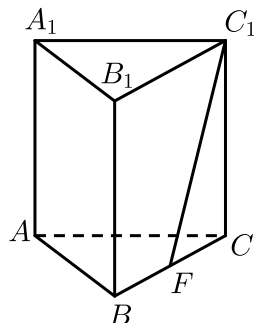
🔗 异面直线

2. 异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点。

 典型例题

 异面直线的判断

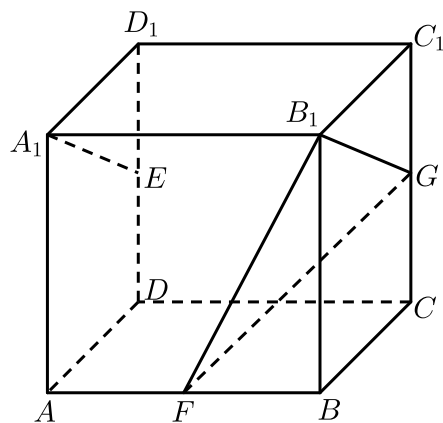
11. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, F 是 BC 中点, 连接 C_1F , 则在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱所在直线中, 与直线 C_1F 异面的直线有 () 条.



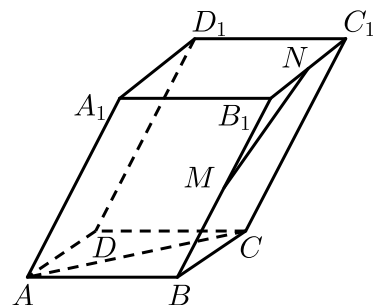
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

 异面直线夹角

12. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = AB = 2$, $AD = 1$, 点 E, F, G 分别是 DD_1, AB, CC_1 的中点. 求



- (1) 异面直线 A_1E 与 BC 所成角的大小 .
 (2) 异面直线 A_1E 与 GF 所成角的大小 .
13. 如图所示, 平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 以顶点 A 为端点的三条棱, 两两夹角均为 60° , 且 $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 3$, M, N 分别为 BB_1, B_1C_1 的中点, 则 MN 与 AC 所成角的余弦值为 () .

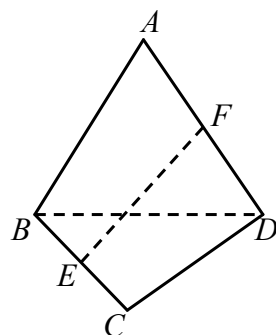


- A. $\frac{13}{14}$ B. $\frac{\sqrt{91}}{14}$
 C. $\frac{\sqrt{91}}{28}$ D. $\frac{\sqrt{78}}{12}$

14. 正四面体 $ABCD$ 中, E 在棱 AB 上, F 在棱 CD 上, 使得 $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD} = 2$, α 表示 EF 与 AC 所成的角, β 表示 EF 与 BD 所成角, 则 $\alpha + \beta = (\quad)$.

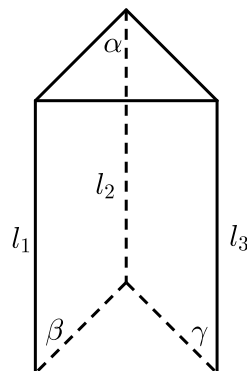
- A. 120° B. 90° C. 60° D. 30°

15. 如图, 在空间四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD = 4$ 且 AB 与 CD 所成的角为 60° , E , F 分别是 BC 、 AD 的中点, 则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$.



|| 直线与直线位置关系

16. 如图所示, 平面 $\alpha \cap \beta = l_1$, $\alpha \cap \gamma = l_2$, $\beta \cap \gamma = l_3$, $l_1 // l_2$, 下列说法正确的是 ().



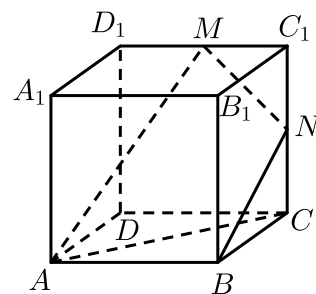
- A. l_1 平行于 l_3 , 且 l_2 平行于 l_3
 B. l_1 平行于 l_3 , 且 l_2 不平行于 l_3
 C. l_1 不平行于 l_3 , 且 l_2 不平行于 l_3

D. l_1 不平行于 l_3 ，但 l_2 平行于 l_3

17. 如图所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M, N 分别为棱 C_1D_1, C_1C 的中点，有以下四个结论：

- ①直线 AM 与 CC_1 是相交直线；
- ②直线 AM 与 BN 是平行直线；
- ③直线 BN 与 MB_1 是异面直线；
- ④直线 MN 与 AC 所成的角为 60° 。

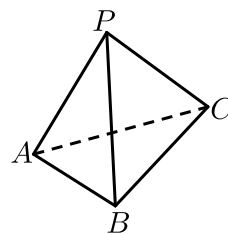
其中正确的结论为 _____。



课堂巩固

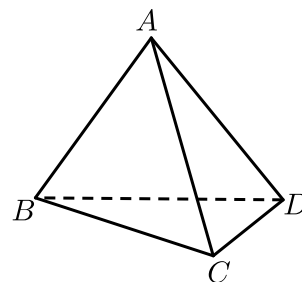
异面直线的判断

18. 如图所示，在三棱锥 $P - ABC$ 的六条棱所在的直线中，异面直线共有 _____ 对。



异面直线夹角

19. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，如 $AB = AD = AC = CB = CD = BD$ ，则 AC 与 BD 所成角为 ()。



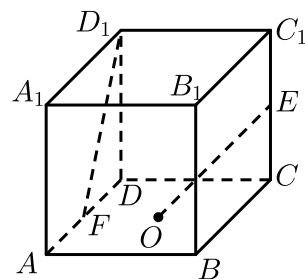
A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°

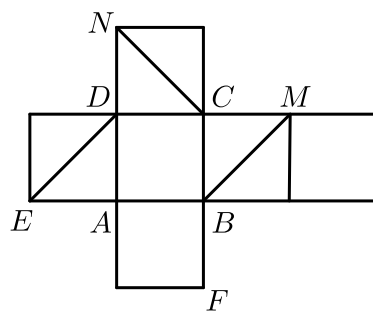
20. 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， O 是底面 $ABCD$ 的中点， E 、 F 分别是 CC_1 、 AD 的中点，那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于（ ）。



- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$
C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

|| 直线与直线位置关系

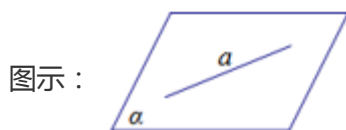
21. 平面 α 过正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三个顶点 B ， D ， A_1 ，且 α 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线为 l ，则 l 与 B_1D_1 的位置关系为 _____（相交、平行、异面）。
22. 如图是一个正方体的平面展开图，在这个正方体中，
- ① BM 与 ED 是异面直线；
 - ② CN 与 BE 平行；
 - ③ CN 与 BM 成 60° 角；
 - ④ DM 与 BN 垂直，
- 以上四个说法中正确的序号是 _____。



三、 线面关系与面面关系

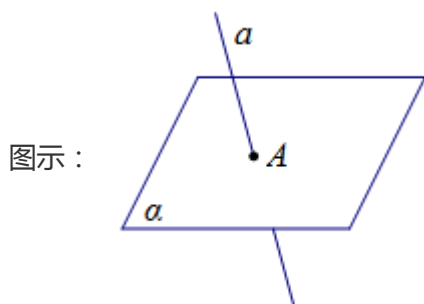
1. 直线与平面的位置关系

 直线在平面内——有无数个公共点



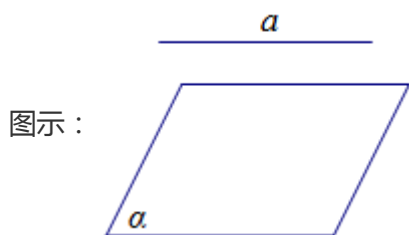
符号表示： $a \subset \alpha$.

💡 直线与平面相交——有且只有一个公共点



符号表示： $a \cap \alpha = A$.

💡 直线与平面平行——没有公共点

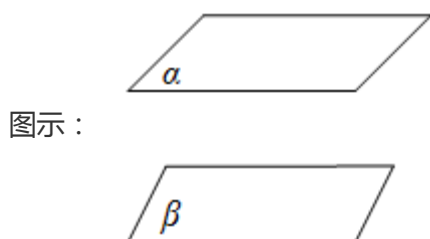


符号表示： $a // \alpha$.

【补充说明】直线与平面相交或平行的情况统称为**直线在平面外** .

2. 平面与平面的位置关系

💡 两个平面平行——没有公共点



符号表示： $\alpha // \beta$.

💡 两个平面相交——有一条公共直线

