

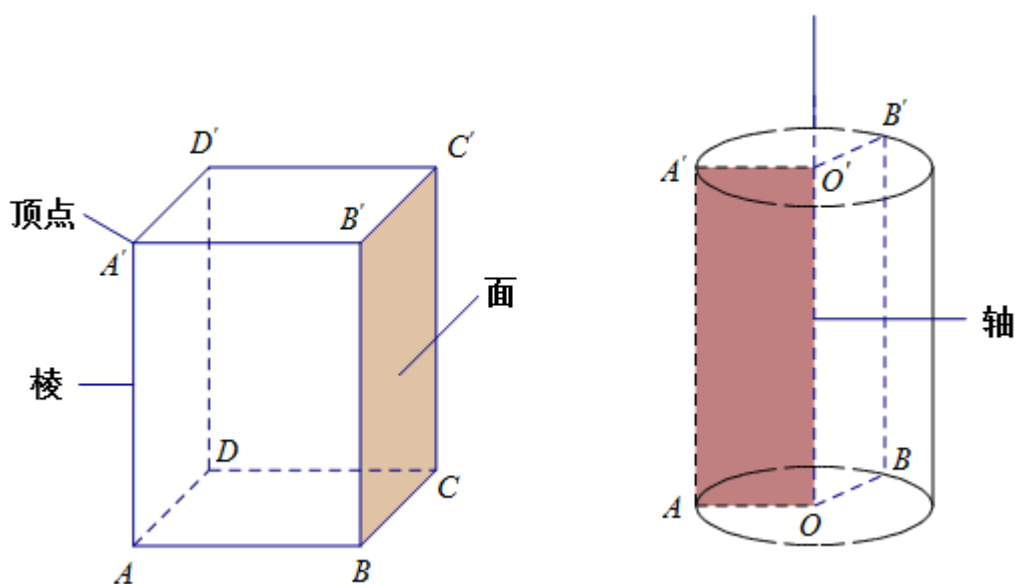
1空间几何体

一、空间几何体的定义与性质

1. 多面体与旋转体

📍 多面体

一般地，我们把由若干个平面多边形围成的几何体叫做**多面体**（如下图左）。围成多面体的各个多边形叫做多面体的**面**。如面 $ABCD$ ，面 $BCC'B'$ ；相邻两个面的公共边叫做多面体的**棱**。如棱 AB ，棱 AA' ；棱与棱的公共点叫做多面体的**顶点**。

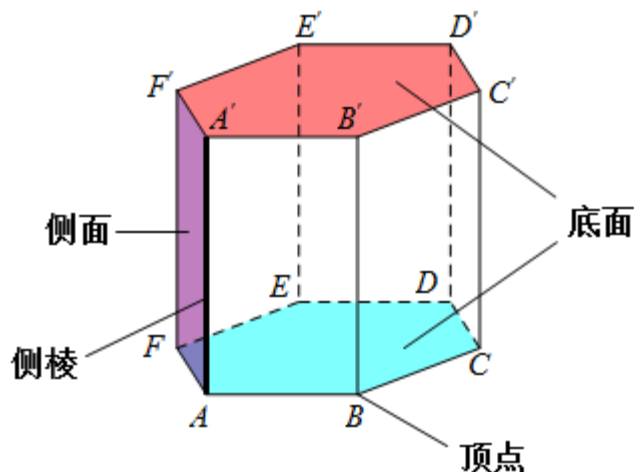


📍 旋转体

我们把由一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋围所形成的封闭几何体叫做**旋转体**（如上图右）。这条定直线叫做旋转体的**轴**。

2. 多面体

📍 棱柱



(1) 相关定义：

如上图，一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行。由这些面所围成的多面体叫做**棱柱**（prism）。棱柱中，两个互相平行的面叫做棱柱的**底面**，简称底（ $ABCDEF$ ）；其余各面叫做棱柱的**侧面**（ $AFF'A'$ ）；相邻侧面的公共边叫做棱柱的**侧棱**（ AA' ）；侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的**顶点**（ B ）。棱柱中不在同一平面上的两个顶点的连线叫做棱柱的**对角线**（ AD' ）。过不相邻的两条侧棱的截面叫做棱柱的**对角面**（ $ACC'A'$ ）。

(2) 棱柱的特征

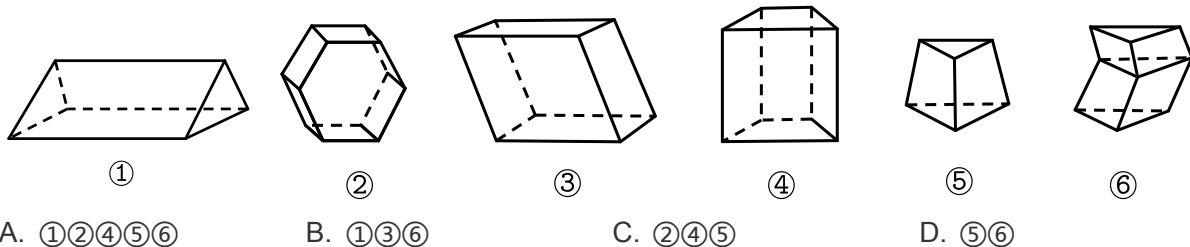
- ①侧棱都**相等**，侧面与对角面都是**平行四边形**；
- ②上下底面与平行于底面的截面都是全等的多边形。

(3) 棱柱的分类

- ①棱柱可以按底面的边数进行分类：底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……我们用表示底面各顶点的字母表示棱柱，上图中的六棱柱表示为棱柱 $ABCDEF - A'B'C'D'E'F'$ 。
- ②侧棱与底面垂直的棱柱是**直棱柱**，否则为斜棱柱；**底面为正多边形的直棱柱是正棱柱**。

🧠 典型例题

1. 有两个面互相平行，其余各面都是四边形，且每相邻的两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫棱柱。根据棱柱的定义，下面的几何体中不是棱柱的是（ ）。



【答案】 D

【解析】 ⑤是棱台，⑥是两个棱柱组成的组合体．

故选D．

【标注】【知识点】平面图形、空间几何体的直观图认识；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

2. 下列说法正确的是（ ）．

- A. 棱柱的面中，至少有两个面互相平行
- B. 棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面
- C. 棱柱中一条侧棱的长叫做棱柱的高
- D. 棱柱的侧面是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形

【答案】 A

【解析】 A项正确，棱柱的底面互相平行；

B项，棱柱的侧面也可以互相平行；

C项，直棱柱的高不是侧棱长；

D项，棱柱的底面也可以是平行四边形．

故选A．

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征

3. 下列关于棱柱的命题，其中真命题的序号是 _____ ．

- ① 棱长相等的直四棱柱是正方体；
- ② 若有两个侧面垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；
- ③ 若两个过相对棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；
- ④ 各侧面都是正方形的棱柱一定是正棱柱；
- ⑤ 若四棱柱的四条体对角线两两相等，则该四棱柱为直四棱柱．

【答案】 ③⑤

【解析】 ① 不正确，底面可能不是正方形，只是菱形；

② 不正确，相对的两个侧面垂直于底面不能得到直四棱柱；

③ 正确；

④ 不正确，底面是菱形，其中一个对角面垂直于底面；

⑤ 正确．

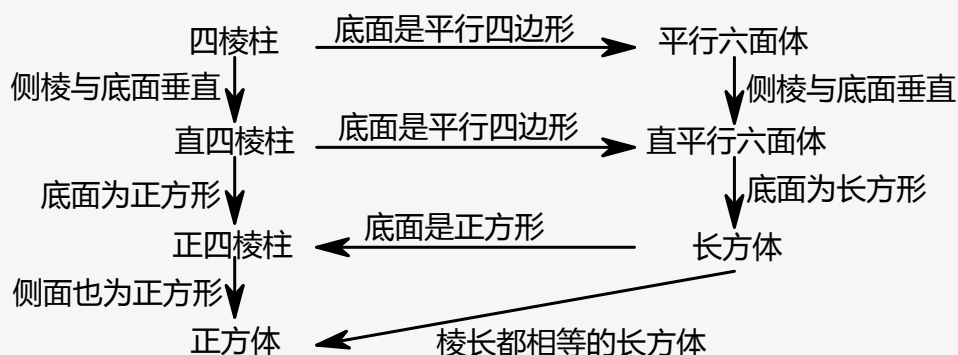
故答案为：③⑤．

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征

4. 设 A 表示平行六面体， B 表示直平行六面体， C 表示长方体， D 表示正四棱柱， E 表示正方体，则 A ， B ， C ， D ， E 的关系是（ ）
- A. $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq E$
B. $A \subseteq B \subseteq D \subseteq C \subseteq E$
C. $E \subseteq D \subseteq C \subseteq B \subseteq A$
D. $E \subseteq C \subseteq D \subseteq B \subseteq A$

【答案】 C

【解析】 由定义知，正方体是特殊的四棱柱，正四棱柱也可以看作特殊的长方体，长方体是特殊的直平行六面体，直平行六面体是平行六面体的特例．其关系如图所示，故C正确．
故选C．



【标注】【知识点】空间几何体概念辨析问题

课堂巩固

5. 下列说法中正确的是（ ）．
- A. 棱柱的一条侧棱长叫做棱柱的高
B. 棱柱的面中，至少有两个面互相平行
C. 棱柱的两个互相平行的面一定是棱柱的底面
D. 棱柱的侧面是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形

【答案】 B

【解析】 A选项：斜棱柱的侧棱就不是棱柱的高，故A错误；

B 选项：由棱柱的定义可知棱柱的侧棱都平行且相等，上、下两个底面相等且为全等的多边形，故B正确；

C 选项：棱柱中两个互相平行的平面也可能是棱柱的侧面，故C错误．

D 选项：棱柱的侧面一定是平行四边形，它的底面也可以是平行四边形，如底面是菱形的斜棱柱，故D错误；

故选 B．

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体概念辨析问题

6. 下列关于棱柱的命题正确的是 _____ ．

①若每个侧面都是全等的矩形，则该四棱柱为正四棱柱；

②若底面是正方形，且有一个顶点处的三条棱两两垂直，则该四棱柱为正四棱柱；

③若底面是正方形，且有两个侧面是矩形，则该四棱柱为正四棱柱．

【答案】 ②

【解析】 ①不正确，底面是菱形的直四棱柱满足题意；

②正确；

③不正确，相对的两个侧面为矩形，不垂直与底面，另外两个侧面垂直于底面．

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；平面图形、空间几何体的直观图认识

7. 设 $M = \{\text{正四棱柱}\}$, $N = \{\text{长方体}\}$, $P = \{\text{直平行六面体}\}$, $Q = \{\text{正方体}\}$, 则 () ．

A. $P \supseteq N \supseteq M \supseteq Q$

B. $Q \subseteq N \subseteq M \subseteq P$

C. $Q \supseteq M \supseteq N \supseteq P$

D. $Q \supseteq M \supseteq N \supseteq P$

【答案】 A

【解析】 正四棱柱底面为正方形，侧面为矩形，

长方体底面为矩形，侧面为矩形，

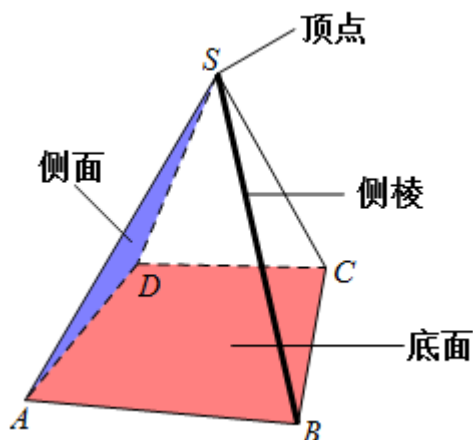
直平行六面体底面为平行四边形，侧面为矩形，

正方体底面为正方形，侧面为正方形，

故 $Q \subseteq M \subseteq N \subseteq P$ ．

【标注】【知识点】空间几何体概念辨析问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

棱锥



(1) 相关定义

如上图，一般地，有一个面是多边形，其余各面都是**有一个公共顶点的三角形**，由这些面所围成的多面体叫做**棱锥**（pyramid）. 这个多边形面叫做棱锥的**底面**或**底**；有公共顶点的各个三角形面叫做棱锥的**侧面**；各侧面的公共顶点叫做棱锥的**顶点**；相邻侧面的公共边叫做棱锥的**侧棱**. 棱锥也用表示顶点和底面各顶点的字母表示，上图中的四棱锥表示为棱锥 $S - ABCD$.

(2) 棱锥的特征

- ①有一个面是多边形；
- ②其余各面是有一个公共顶点的三角形.

(3) 棱锥的分类

- ①底面是三角形、四边形、五边形.....的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥.....其中三棱锥又叫四面体.
- ②如果一个棱锥的**底面是正多边形**，并且**顶点在底面上的射影是底面的中心**，这样的棱锥叫做**正棱锥**.

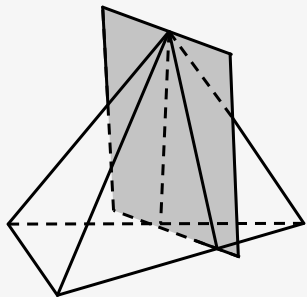
典型例题

8. 下列关于棱锥的命题，其中真命题的序号是 _____ .

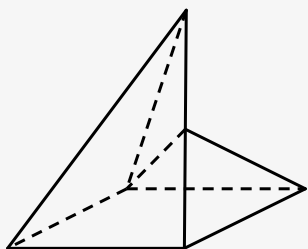
- ①棱锥被平面分成的两部分不可能都是棱锥；
- ②有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体是棱锥；
- ③棱锥的高线可能在几何体之外；
- ④若底面为正多边形，则该棱锥为正棱锥；
- ⑤若各侧棱都相等，则该棱锥为正棱锥；

【答案】③

【解析】①不正确，若这个平面正好过棱锥的顶点与底面的对角线，可以将一个棱锥分成两个小棱锥；



②不正确，必须是有一个公共顶点的三角形；



③正确；

④不正确；

⑤不正确；只能得到顶点在底面的投影为底面多边形外接圆的圆心。

故答案为③。

【标注】【知识点】平面图形、空间几何体的直观图认识；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

9. 一个正棱锥的侧棱长与底面边长相等，则该棱锥不可能是（ ）

A. 三棱锥

B. 四棱锥

C. 五棱锥

D. 六棱锥

【答案】D

【解析】对于一个正棱锥来说，它的高、侧棱及侧棱在底面的射影构成了一个直角三角形，对六棱锥来说，侧棱在底面的射影即正六边形的中心与顶点的连线，它的长与底面边长相等，从而与侧棱长相等，故上述三角形的直角边与斜边等长，这不可能，故选D。

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体概念辨析问题

 课堂巩固

10. 下列命题中，是真命题的是（ ）.

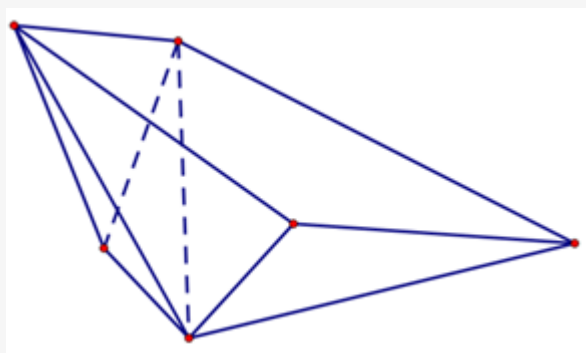
- A. 底面是正方形的棱锥是正四棱锥
- B. 各条侧棱都相等的棱锥是正棱锥
- C. 一个面是多边形，其余各个面是三角形的几何体是棱锥
- D. 正四面体是正三棱锥

【答案】 D

【解析】 选项A：底面为正方形，顶点在底面的投影是底面中心才是正四棱锥，错误；

选项B：各个侧面都是全等的等腰三角形的棱锥才是正棱锥，错误；

选项C：如图：



错误.

故选D.

【标注】 【知识点】 棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体概念辨析问题

11. 如果一个棱锥的各个侧面都是等边三角形，那么这个棱锥不可能是（ ）.

- A. 三棱锥
- B. 四棱锥
- C. 五棱锥
- D. 六棱锥

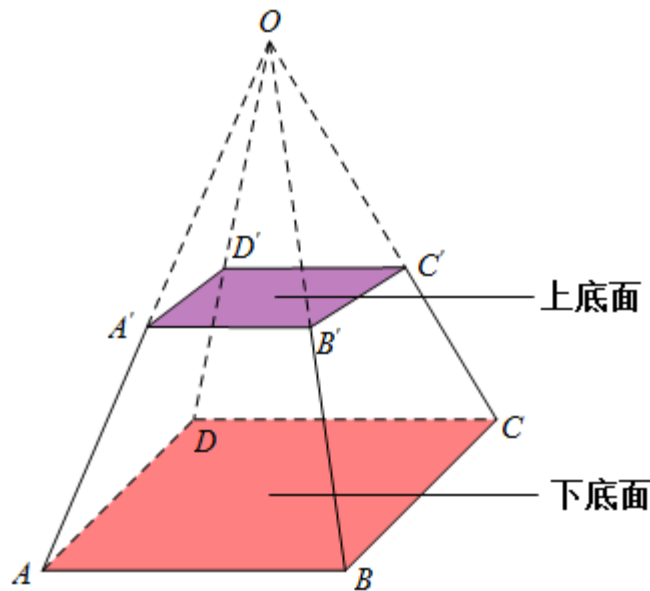
【答案】 D

【解析】 等边三角形每个角 60° ，当6个角连在一起时，就是 360° ，是一个平面，不可能是立体图形.

【标注】 【知识点】 棱柱、棱锥、棱台的结构特征



棱台



(1) 相关定义

我们已经学过棱柱和棱锥，但是具有上图中这种结构的几何体我们没有学过．它是用一个**平行于棱锥底面的平面**去截棱锥从而得到底面与截面之间的部分，这样的多面体叫做**棱台**（frustum of a pyramid）．原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的**下底面**和**上底面**，棱台也有**侧面**、**侧棱**、**顶点**．上图中的四棱台表示为棱台 $ABCD - A'B'C'D'$ ．

(2) 棱台的分类

- ①由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台．
- ②由正棱锥截得的棱台叫做**正棱台**．

(3) 正棱台的性质：

- ①侧棱全都相等，侧面是全等的等腰梯形，各等腰梯形的高称为正棱台的斜高；
- ②正棱台的上下底面以及平行于上下底面的截面是相似的正多边形．

🧠 典型例题

12. 下列命题中正确的是（ ）．

- A. 用一个平面去截棱锥，棱锥底面和截面之间的部分是棱台
- B. 两个底面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台
- C. 棱台的底面是两个相似的正方形
- D. 棱台的侧棱延长后必交于一点

【答案】 D

【解析】 A 选项：应该用一个与底面平行的平面去截棱锥，故A错误；

B 选项：将两个全等的棱台上底贴合在一起，所得几何体的两底平行且相似，其余各面都是梯形，但是该几何体不是棱台，故B错误；

C 选项：棱台的底面可以是三角形、四边形、五边形等等，不一定是正方形，故C错误；

D 选项：棱台的侧棱延长后必交于一点，故D正确．

故选 D．

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体概念辨析问题

课堂巩固

13. 棱台不具有的性质是（ ）．

A. 两底面相似

B. 侧面都是梯形

C. 侧棱延长后交于一点

D. 侧棱长都相等

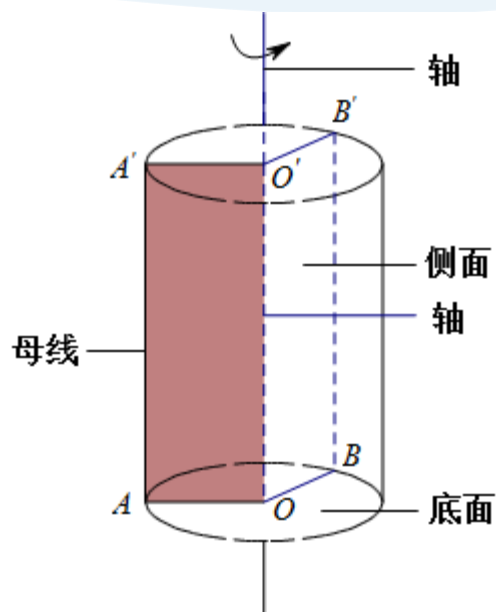
【答案】 D

【解析】 根据棱台的定义：用平行于底面的平面截棱台，截面与底面之间的部分叫棱台， $\therefore$ 棱台具有的性质是：上、下底面多边形相似；每个侧面都是梯形；侧棱延长后交于一点．故选项A、B、C都是棱台具有的性质．棱台的侧棱有的相等，有的不相等，故选项D是棱台不具有的性质．故选：D．

【标注】【知识点】空间几何体概念辨析问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

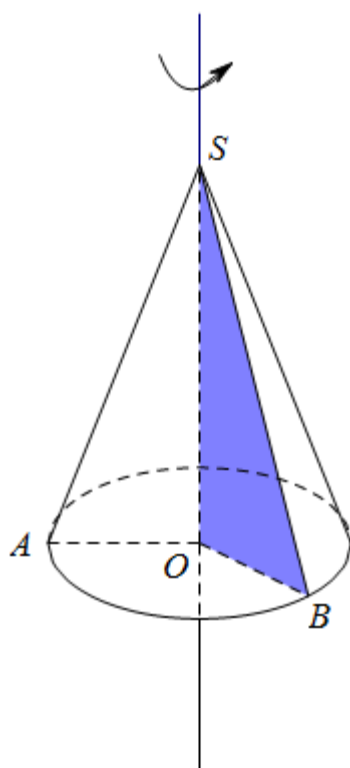
3. 旋转体

圆柱



如上图，以矩形 $AOO'A'$ 的一边 OO' 所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做**圆柱**．旋转轴叫做圆柱的**轴**；垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的**底面**；平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的**侧面**；**无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线**．圆柱用表示它的轴的字母表示，上图中的圆柱表示为圆柱 $O'O$ ．圆柱和棱柱统称为柱体．

圆锥

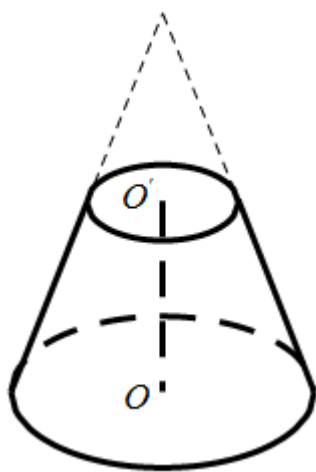


与圆柱一样，圆锥也可以看作是由平面图形旋转而成的，如上图，以直角三角形 SOB 的一条直角边 OS 所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做**圆锥**．圆锥也有轴、底面、侧面和母

线。

圆锥也用表示它的轴的字母表示，上图中的圆锥表示为圆锥 SO 。棱锥与圆锥统称为锥体。

🔗 圆台

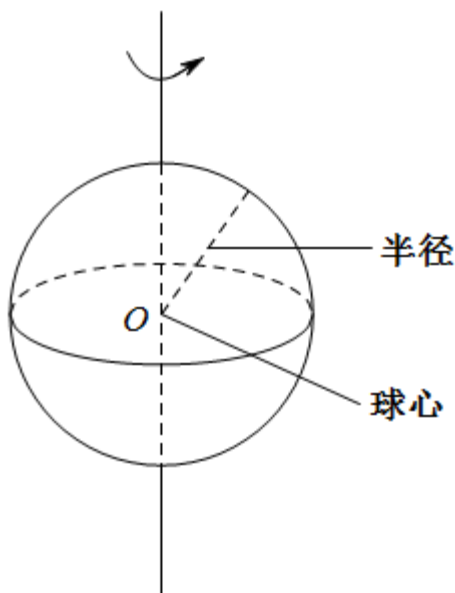


与棱台类似，用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分（如上图）叫做**圆台**。

与圆柱和圆锥一样，圆台也有轴、底面、侧面、母线，请在上图中标出它们，并用字母将上图中的圆台表示出来。

棱台与圆台统称为台体。

🔗 球



如上图，以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋围一周形成的旋转体叫做**球体**，简你**球**。半圆的圆心叫做球的**球心**，半圆的半径叫做球的**半径**，半圆的直径叫做球的**直径**。球常用表示球心的字母 O 表示，上图中的球表示为球 O 。

 典型例题

14. 有下列四个判断：

- ①以直角三角形的一边所在直线为轴旋转所得的旋转体是圆锥；
- ②以直角梯形的一腰所在直线为轴旋转所得的旋转体是圆台；
- ③用一个平面去截一个圆锥，得到一个圆锥和一个圆台；
- ④圆柱、圆锥和圆台的底面都是圆．

其中判断正确的有（ ）个．

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】 A

【解析】 直角三角形的斜边为轴旋转一周所得的旋转体不是圆锥，故①错误；
以直角梯形的一斜腰为轴旋转一周所得的旋转体不是圆台，故②错误；
一个平行于底面平面截圆锥，得到一个圆锥和一个圆台，当截面与地面不平行时，得到的两个几何体不是圆锥和圆台，故③错误；
圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面，故④错误．

【标注】 【知识点】圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征；空间几何体概念辨析问题

15. 有下列命题：

- ①在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；
- ②圆柱的任意两条母线所在的直线是互相平行的；
- ③圆锥顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线；
- ④经过圆锥顶点的截面一定是等腰三角形；
- ⑤在经过圆锥顶点的截面中，轴截面的面积最大；
- ⑥平行于圆锥母线的截面一定是等腰三角形．

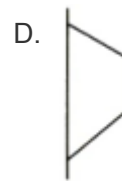
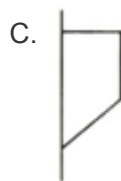
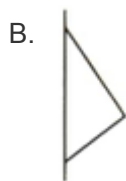
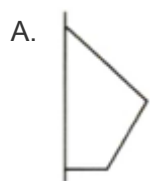
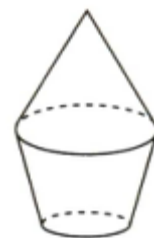
其中正确命题的序号是 _____ ．

【答案】 ②③④⑤

【解析】 ②③④⑤．

【标注】 【知识点】圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

16. 如图所示的几何体是由哪个平面图形旋转得到的（ ）．



【答案】 A

【解析】 此几何体是由一个圆锥和一个圆台拼接而成的，所以它可看做是一个直角三角形与一个直角梯形拼接后旋转而成的．

点拨：将简单组合体进行分解，分解为常见简单几何体的问题．

【标注】 【知识点】空间几何体概念辨析问题；圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

课堂巩固

17. 下列说法正确是（ ）．

- A. 圆台是直角梯形绕其一边旋转而成
- B. 圆锥是直角三角形绕其一边旋转而成
- C. 圆柱的母线和它的底面不垂直
- D. 圆台可以看作是平行于底面的平面截一个圆锥而得到的

【答案】 D

【解析】 圆台是直角梯形绕其直角边旋转而成，故A错误；

圆锥是直角三角形绕其直角边旋转而成，故B错误；

圆柱是旋转体，圆柱是矩形绕其一边旋转而成，故C错误；

故D正确．

故选D．

【标注】 【知识点】空间几何体概念辨析问题；圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

18. 给出下列命题：

- ①在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；
- ②圆锥的顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线；
- ③在圆台的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆台的母线；
- ④圆柱的任意两条母线所在的直线是互相平行的．

其中正确的是()．

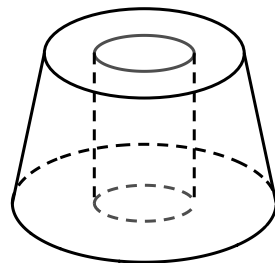
- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ②④

【答案】 D

【解析】 根据圆柱、圆锥、圆台的定义和性质可知，只有②④两个命题是正确的，①③可能是任意弦，故选D．

【标注】【知识点】圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

19. 如图，某工厂生产的一种机器零件原胚的直观图是一个中空圆台，中空部分呈圆柱形状，且圆柱底面圆心与圆台底面圆心重合，该零件原胚可由下面图形绕对称轴（直线 l ）旋转而成，这个图形是()．



- A.
- B.
- C.
- D.

【答案】 B

【解析】根据零件原胚的直观图可知，中空部分呈圆柱形状，
而圆柱形状由矩形旋转形成，圆台由梯形旋转形成，分析四个选项，
A选项：旋转后圆台；
C选项：旋转后圆台；
D选项：球体中挖去一个小球．
故选B．

【标注】【知识点】空间几何体概念辨析问题；圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

二、空间几何体的表面积与体积

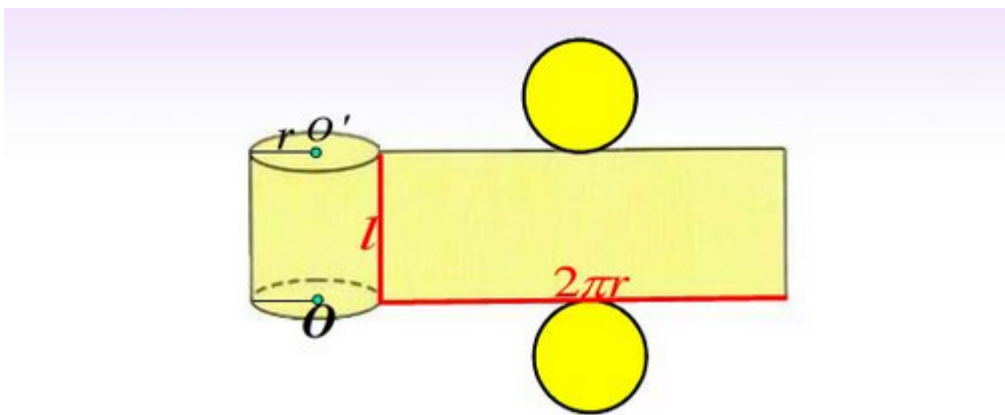
1. 表面积

🔗 圆柱

圆柱的侧面展开图是一个矩形．

如果圆柱的底面半径为 r ，母线长为 l ，那么圆柱的底面积（包括上底面和下底面）为 πr^2 ，侧面积为 $2\pi rl$

因此，圆柱的表面积为二者之和，即 $S = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi r(r + l)$ ．



圆柱的侧面展开图是矩形

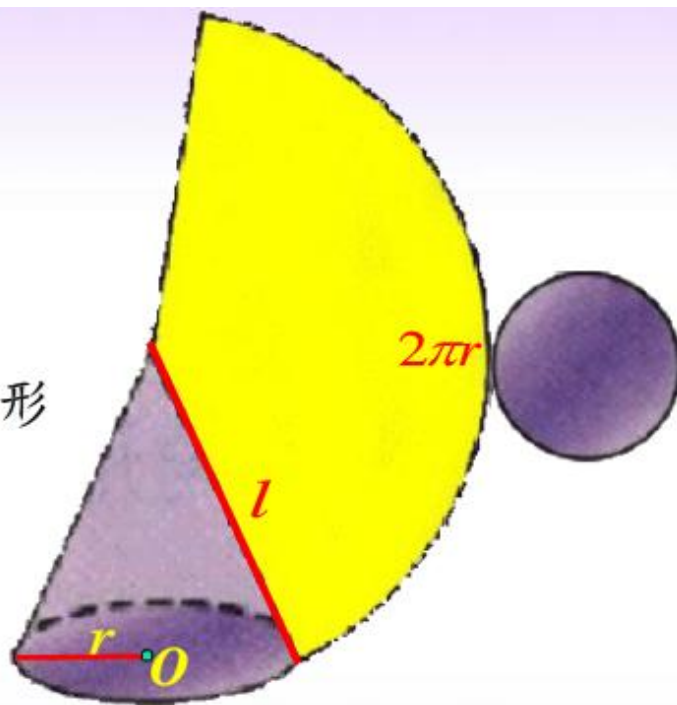
$$S_{\text{圆柱表面积}} = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi r(r + l)$$

🔗 圆锥

圆锥的侧面展开图是一个扇形．

如果圆锥的底面半径为 r ，母线长为 l ，那么它的底面积为 πr^2 ，侧面积为 πrl ，表面积
 $S = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r + l)$.

圆锥的侧面展开图是扇形



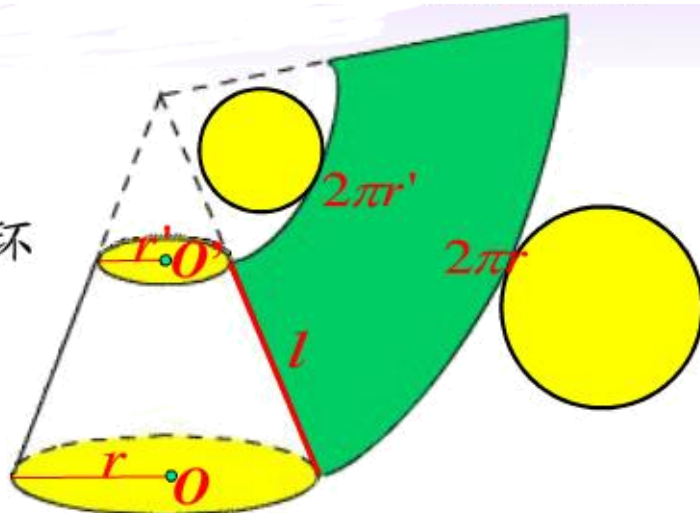
$$S_{\text{圆锥表面积}} = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r + l)$$

圆台

圆台的侧面展开图是一个扇环 .

它的表面积等于上、下两个底面的面积和加上侧面的面积，即 $S = \pi(r'^2 + r^2 + r'l + rl)$.

圆台的侧面展开图是扇环



$$S_{\text{圆台表面积}} = \pi (r'^2 + r^2 + r'l + rl)$$



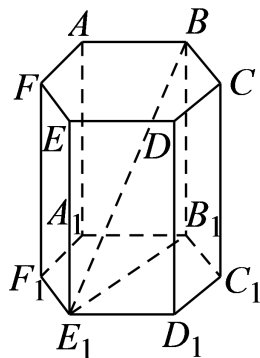
球

如果球的半径为 R ，那么它的表面积 $S = 4\pi R^2$.



典型例题

20. 正六棱柱的底面边长为2，最长的一条对角线长为 $2\sqrt{5}$ ，则它的表面积为（ ） .

A. $4(3\sqrt{3} + 4)$ B. $12(\sqrt{3} + 2)$ C. $12(2\sqrt{3} + 1)$ D. $3(\sqrt{3} + 8)$

【答案】 B

【解析】 设侧棱长为 a ，则 $\sqrt{a^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ， $\therefore a = 2$ ，

$$\therefore S_{\text{表}} = 6 \times (2 \times 2) + 2 \times 6 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \right) = 12(2 + \sqrt{3}) .$$

故选B .

【标注】 【知识点】 空间几何体的表面积

21. 一个圆柱和一个圆锥的母线相等，底面半径也相等，则圆柱和圆锥的侧面积之比是 _____ .

【答案】 2 : 1

【解析】 设圆锥、圆柱的母线为 l ，

底面半径为 r ，

$$\therefore \text{圆锥的侧面积为：} \frac{1}{2} \times 2r\pi \times l = \pi rl ,$$

圆柱的侧面积为： $2\pi rl$ ，

$\therefore$ 圆柱和圆锥的侧面积的比为：2 : 1 .

故答案为2 : 1 .

【标注】 【知识点】 组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积

22. 过球的一条半径的中点，作垂直于该半径的平面，则所得截面的面积与球的表面积的比为（ ）.

A. $\frac{3}{16}$

B. $\frac{9}{16}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{9}{32}$

【答案】A

【解析】设球的半径为 R ，过球的一条半径的中点，作垂直于该半径的平面，由勾股定理可得一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 的圆，所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{16}$ ，故选A.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{16}$$

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积；空间几何体的体积

课堂巩固

23. 底面是菱形的棱柱其侧棱垂直于底面，且侧棱长为5，它的体对角线的长分别是9和15，则这个棱柱的侧面积是_____.

【答案】160

【解析】设底面边长是 a ，底面的两条对角线分别为 l_1, l_2 ，而 $l_1^2 = 15^2 - 5^2, l_2^2 = 9^2 - 5^2$ ，而 $l_1^2 + l_2^2 = 4a^2$ ，即 $15^2 - 5^2 + 9^2 - 5^2 = 4a^2, a = 8, S = ch = 4 \times 8 \times 5 = 160$.

【标注】【知识点】平面图形、空间几何体的直观图认识；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积

24. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是_____.

【答案】 $\frac{2\pi + 1}{2\pi}$

【解析】设底面圆的半径为 r ，

圆柱高为 h ，

则 $2\pi r = h$ ，

侧面积 $S_1 = h^2$ ，

全面积 $S_2 = h^2 + 2\pi r^2 = \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right)h^2$ ，

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{2\pi + 1}{2\pi}.$$

【标注】【知识点】圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积；平面图形、空间几何体的直观图认识

2. 体积

柱体

一般柱体的体积也是 $V = Sh$.

其中 S 为底面面积中, h 为柱体的高 .

锥体

锥体 (包括棱锥与圆锥) 的体积公式是 $V = \frac{1}{3}Sh$.

其中 S 为底面面积中, h 为锥体的高 .

台体

由于圆台 (棱台) 是由圆锥 (棱锥) 截成的, 因此可以利用两个锥体的体积差, 得到圆台 (棱台) 的体积公式 $V = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$,

其中 S' , S 分别为上、下底面面积, h 为圆台 (棱台) 高 .

球

如果球的半径为 R , 那么它的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

典型例题

25. 设棱长为 a 的正方体的体积和表面积分别为 V_1, S_1 , 底面半径和高均为 r 的圆锥的体积和侧面积分别为 V_2, S_2 , 若 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{\pi}$, 则 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$

【解析】 $V_1 = a^3, S_1 = 6a^2, V_2 = \frac{\pi}{3}r^3, S_2 = \pi r^2\sqrt{2}$,
由 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{\pi}$, 可得 $a = r$,
则 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{6}{\pi\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}$.

【标注】 【知识点】 已知线面位置关系判定结论的问题; 空间几何体的表面积; 空间几何体的体积; 平面图形、空间几何体的直观图认识

26. 已知一平面截球所得的截面面积为 2π , 球心到该截面的距离为 1, 则该球的体积是 () .

A. $4\sqrt{3}\pi$

B. $2\sqrt{3}\pi$

C. $\sqrt{3}\pi$

D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$

【答案】 A**【解析】** 用一平面去截球所得截面的面积为 2π ，所以小圆的半径为： $\sqrt{2}\text{cm}$ ；已知球心到该截面的距离为1，所以球的半径为 $\sqrt{3}$ ，所以球的体积为 $\frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi$.**【标注】**【知识点】空间几何体的体积；球的截面问题 **课堂巩固**27. 若圆锥的侧面积为 15π ，底面面积为 9π ，则该圆锥的体积为 _____ .**【答案】** 12π **【解析】** 根据题意，圆锥的底面面积为 9π ，则其底面半径是3，底面周长为 6π ，圆锥的侧面积为 15π ，

又 $\frac{1}{2} \times 6\pi l = 15\pi$ ，

∴圆锥的母线为5，则圆锥的高 $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，所以圆锥的体积 $\frac{1}{3} \times 4 \times 9\pi = 12\pi$.故答案为： 12π .**【标注】**【知识点】空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题

三、直观图

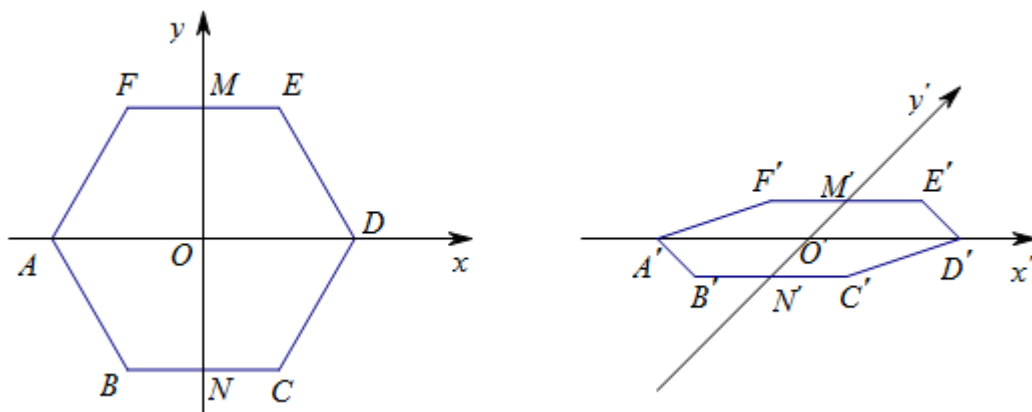
1. 平面图形的直观图

【例一】用斜二测画法画水平放置的正六边形的直观图 .

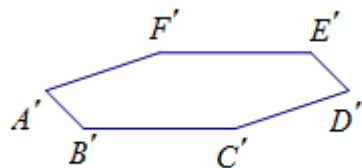
画法如下：

(1) 在正六边形 $ABCDEF$ 中，取 AD 所在直线为 x 轴，对称轴 MN 所在直线为 y 轴，两轴相交于点 O ，构建平面直角坐标系，称为坐标系一 . 与坐标系一对应，构造相应的 x' 轴与 y' 轴，两轴相交于点 O' ，使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ ，得到斜坐标系，称为坐标系二 .

(2) 在坐标系二中, 以 O' 为中点, 在 x' 轴上取 $A'D' = AD$, 在 y' 轴上取 $M'N' = \frac{1}{2}MN$. 以点 N' 为中点, 画 $B'C'$ 平行于 x' 轴, 并且等于 BC ; 再以 M' 为中点, 画 $E'F'$ 平行于 x' 轴, 并且等于 EF (见下图) .



(3) 连接 $A'B'$, $C'D'$, $D'E'$, $F'A'$, 并擦去辅助线 x' 轴和 y' 轴, 便获得正六边形 $ABCDEF$ 水平放置的直观图 $A'B'C'D'E'F'$ (见下图) .



上述画直观图的方法即为**斜二测画法**, 它的步骤是:

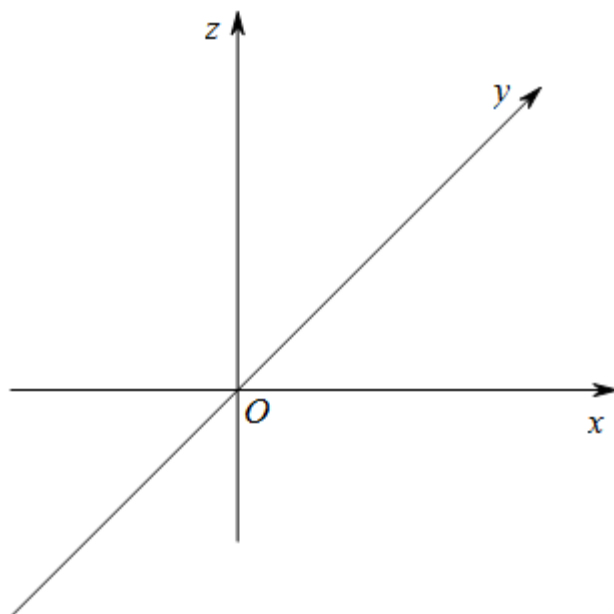
- (1) 在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴. 两轴相交于点 O . 画直观图时, 把它们画成对应的 x' 轴与 y' 轴, 两轴交于点 O' , 且使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°) . 它们确定的平面表示水平面.
- (2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段, 在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段.
- (3) 已知图形中平行于 x 轴的线段, 在直观图中保持原长度不变, 平行于 y 轴的线段, 长度为原来的一半.

2. 空间几何体的直观图

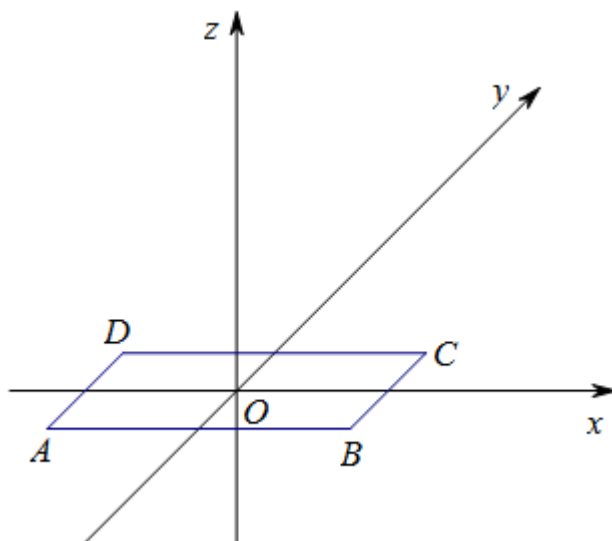
【例二】用斜二测画法画长、宽、高分别是4cm, 3cm、3cm的长方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的直观图.

画法如下:

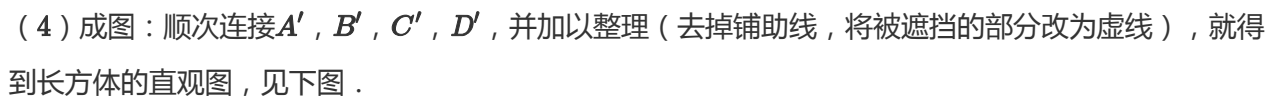
- (1) 画轴: 画 x 轴、 y 轴、 z 轴, 三轴相交于点 O . 使 $\angle xOy = 45^\circ$, $\angle xOz = 90^\circ$, 见下图.



(2) 画底面：以点 O 为中点，在 x 轴上取线段 MN ，使 $MN = 4\text{ cm}$ ；在 y 轴上取线段 PQ ，使 $PQ = \frac{3}{2}\text{ cm}$ ．分别过点 M 和 N 做 y 轴的平行线，过点 P 和 Q 作 x 轴的平行线．设它们的交点分别为 A, B, C, D ．四边形 $ABCD$ 就是长方体的底面 $ABCD$ ，见下图．



(3) 画侧棱：过 A, B, C, D 各点分别作 z 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取 3 cm 长的线段 AA', BB', CC', DD' ，见下图．



28. 用斜二测画法画边长为2的正方形 $ABCD$ 的直观图时, 以射线 AB , AD 分别为 x 轴、 y 轴的正半轴建立直角坐标系, 在相应的斜角坐标系中得到直观图 $A'B'C'D'$, 则该直观图的面积为().

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】 A

【解析】由题意可知：该直观图面积为： $2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times \cos 45^\circ = \sqrt{2}$.

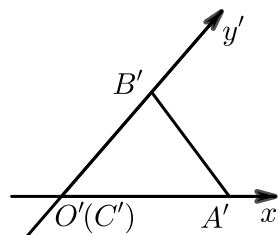
故选A.

【标注】 **【知识点】** 斜二测画法

29. 如图, 矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形的直观图, 其中 $O'A' = 6\text{cm}$, $O'C' = 2\text{cm}$, 则原图形 $OABC$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}} \text{cm}^2$.

【标注】【知识点】斜二测画法

31. 水平放置 $\triangle ABC$ 的斜二测直观图如图所示，已知 $A'C' = 3$ ， $B'C' = 2$ ，则 AB 边上的中线的长度为_____。



【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 $\because$ 直观图中 $A'C' = 3$ ， $B'C' = 2$ ，
 $\therefore$ Rt $\triangle ABC$ 中， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，
由勾股定理可得 $AB = 5$ ，
则 AB 边上的中线的实际长度为 $\frac{5}{2}$ 。
故答案为： $\frac{5}{2}$ 。

【标注】【知识点】斜二测画法