

正弦定理和余弦定理

一、 正弦定理

1. 知识讲解

正弦定理

在一个三角形中，各边的长和它所对的角的正弦的比相等，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \text{ 为三角形外接圆半径}) .$$

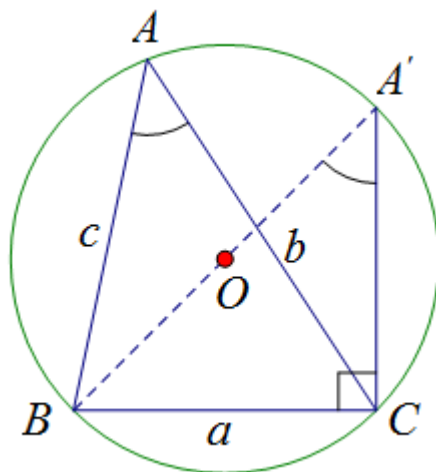
在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

下面我们利用分类讨论的思想并配合三角形的外接圆对这个定理进行证明：

做出 $\triangle ABC$ 的外接圆，假设外接圆半径为 R ，圆心为 O 。

①当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，如下图：

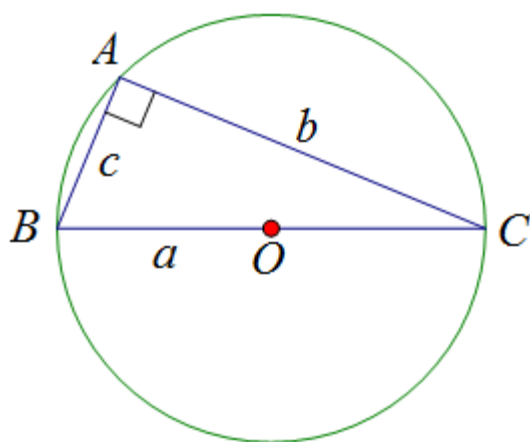


连接 BO 并延长交圆于 A' ，则 $\angle A'CB = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle A' = \angle A$ （圆周角定理）

在 $Rt\triangle A'BC$ 中， $\frac{BC}{\sin A'} = A'B$ ， $\therefore \frac{BC}{\sin A'} = \frac{BC}{\sin A} = A'B = 2R$ ，即 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ，同理可证

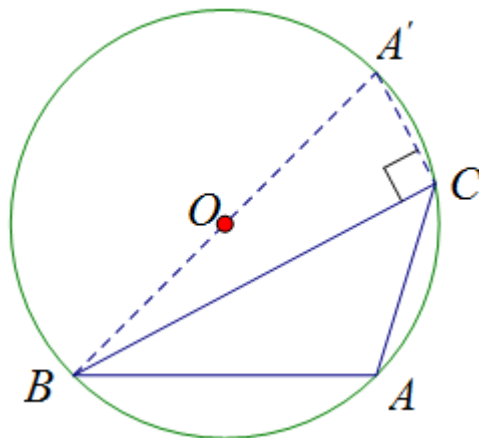
$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \frac{c}{\sin C} = 2R, \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R .$$

②当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时，如下图：



设 $\angle C$ 为直角, 则 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = c$, 此时 c 恰好为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径, 故仍然满足 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

③当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时, 假设 $\angle A$ 为钝角, 如下图:



连接 BO 并延长交圆于 A' , 连接 CA' , 则 $\angle A'CB = \frac{\pi}{2}$, $A' = \pi - A$.

在 $Rt\triangle A'BC$ 中, $\frac{BC}{\sin A'} = A'B$, $\therefore \frac{BC}{\sin A'} = \frac{BC}{\sin(\pi - A)} = \frac{BC}{\sin A} = A'B = 2R$, 即 $\frac{a}{\sin A} = 2R$,

同理可证 $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

综上所述, 对任意 $\triangle ABC$, 均有 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 成立, 其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径.

🔗 正弦定理常见变形

① $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$;

② $\sin A = \frac{a}{2R}$; $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$;

③ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$.

🔗 正弦定理的简单应用

(1) 已知两角和任意一边, 求另一角和它的两条边;

(2) 已知两边和其中一边的对角, 求另一边和其中的对角.

【思路】式子中边角共存时, 优先考虑边化角或角化边.

2. 例题精讲

例1

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2, b = 3$, 那么 $\frac{\sin A}{\sin(A+C)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例2

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2, B = 60^\circ, C = 75^\circ$, 则 b 等于().

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{8}{3}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sin(A+B) = \frac{1}{3}, a = 3, c = 4$, 则 $\sin A =$ ().

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

例3

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 3, \cos A = -\frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 _____.

例4

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ, AC = 2\sqrt{3}, BC = 3\sqrt{2}$, 则角 B 等于().

- A. 45° B. 30° 或 60°
C. 135° D. 45° 或 135°

3. 课堂巩固

练1

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若 $3a = 2b$, 则 $\frac{2\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A}$ 的值为().

- A. $-\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. $\frac{7}{2}$

练2

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对应的边分别为 $a, b, c, \angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ, b = 2$, 则 a 的值为().

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{3}$
D. $2\sqrt{3}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $B = 75^\circ$, $a = 10$, 则 $c =$ ()

A. $5\sqrt{2}$
C. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

B. $10\sqrt{2}$
D. $5\sqrt{6}$

9. $\triangle ABC$ 中, $a = 5$, $b = \frac{5\sqrt{2}}{3}$, $A = \frac{\pi}{4}$, 则 $\sin B =$ _____ .

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 5$, $b = 3$, $\sin A = \frac{5}{9}$, 则 $\sin B$ 的值为 _____ .

练3

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $A = 30^\circ$, 则 B 等于 () .

A. 30°
C. 60°

B. 30° 或 150°
D. 60° 或 120°

练4

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $c = 1$, 则 $b =$ _____ ; 三角形的外接圆半径 $R =$ _____ .

二、三角形多解问题

1. 知识讲解

已知三角形的两边和其中一边的对角, 不能唯一确定三角形的形状, 解这类三角形问题将出现无解、一解和两解三种情况, 应分情况予以讨论.

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 a , b 和 $\angle A$ 时, 解的情况如下:

①从代数角度分析

i. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$, 则满足条件的三角形的个数为0, 即无解;

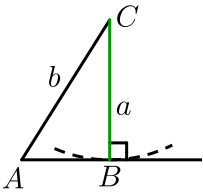
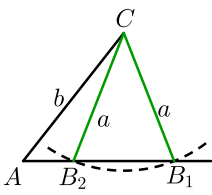
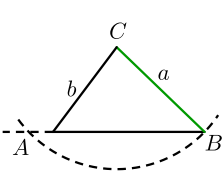
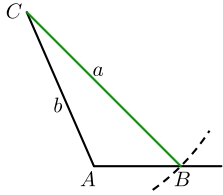
ii. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = 1$, 则满足条件的三角形的个数为1;

iii. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$, 则满足条件的三角形的个数为1或2.

显然由 $0 < \sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$ 可得 $\angle B$ 有两个值, 一个为钝角一个为锐角, 考虑到“大边对大角”

“三角形内角和等于 180° ”等, 此时需进行讨论.

②从几何角度分析

	$\angle A$ 为锐角			$\angle A$ 为钝角或直角
图形				
关系式	$a = b \sin A$	$b \sin A < a < b$	$a \geq b$	$a > b$
解的个数	一解	两解	一解	一解

上表中若 $\angle A$ 为锐角，当 $a < b \sin A$ 时无解；若 $\angle A$ 为钝角或直角，当 $a \leq b$ 时无解。

2. 例题精讲

例1

13. $\triangle ABC$ 中，根据下列条件中，判断正确的是（ ）。

- A. $a = 7, b = 14, A = 30^\circ$ 两解
- B. $a = 30, b = 25, A = 150^\circ$ 单解
- C. $a = 6, b = 9, A = 45^\circ$ 双解
- D. $a = 9, c = 10, B = 60^\circ$ 无解

14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $b = 30, c = 15, C = 26^\circ$ ，则此三角形解的情况为（ ）。

- A. 一解
- B. 两解
- C. 无解
- D. 无法确定

15. 如果满足条件 $B = 60^\circ, b = 12$ 的 $\triangle ABC$ 有且只有一个，则 a 的范围是（ ）。

- A. $0 < a \leq 12$
- B. $12 < a < 8\sqrt{3}$
- C. $0 < a \leq 12$ 或 $a = 8\sqrt{3}$
- D. $12 < a \leq 8\sqrt{3}$

3. 课堂巩固

练1

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $b = 2, c = \sqrt{3}, \angle C = \frac{\pi}{6}$ ，则满足上述条件的三角形的个数为（ ）。

- A. 0个
- B. 1个
- C. 2个
- D. 不确定

17. 下列条件中，使得 $\triangle ABC$ 有唯一解的是（ ）。

- A. $a = 4, b = 5, A = 30^\circ$
 B. $a = 5, b = 4, A = 60^\circ$
 C. $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, B = 120^\circ$
 D. $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{6}, A = 60^\circ$

三、余弦定理

1. 知识讲解

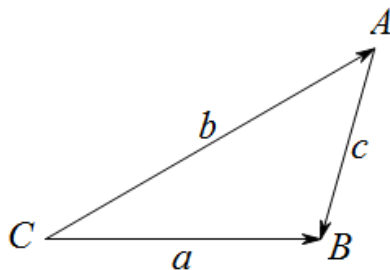
余弦定理

三角形任何一边的平方等于其它两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍。

$$\text{即: } \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{cases}$$

余弦定理的证明

证明：由于涉及边长问题，我们可以考虑用向量的数量积，或用解析几何中的两点间距离公式来研究这个问题，如下图：



设 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, 那么

$$c^2 = \vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 - 2ab \cos C + b^2,$$

所以 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

同理可以证明： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

余弦定理常见变形

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{aligned}$$

余弦定理的简单应用

(1) 已知两边和它们的夹角, 求其他边和角.

(2) 已知三边, 求角.

2. 例题精讲

例1

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 1$, $b = 2$, $C = 60^\circ$, 则边 c 等于 ().

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 3 D. 4

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , $a = 3$, $c = 8$, $B = 60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c . 若 $c = 3$, $C = \frac{\pi}{3}$, $\sin B = 2 \sin A$, 则 $a =$ _____.

例2

21. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c . 已知 $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, 则角 $C =$ ().

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

22. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c 且 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, 则角 A 等于 _____.

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 6$, $b = 7$, $\cos C = \frac{5}{7}$, 则最大内角的余弦值是 _____.

24. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 的对边分别是 a , b , c , 若 $a^2 = 2b^2$, $\sin C = \sqrt{3} \sin B$. 则 $\cos A =$ _____.

3. 课堂巩固

练1

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对应的边分别为 a , b , c , $\angle B = 60^\circ$, $a = 4$, $c = 6$, 则 b 的长度为 _____.

26. $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别是 a 、 b 、 c , 若 $B = 2A$, $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, 则 $c =$ ().

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 1

27.

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{7}{8}$, $c - a = 2$, $b = 3$, 则 a 等于 () .

- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

28. 在 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $\sin B = 2 \sin C$, $a = \sqrt{6}$, $\cos A = \frac{7}{8}$, 则边 c 等于 () .

- A. 2 B. $\sqrt{6}$ C. 4 D. $2\sqrt{3}$

练2

29. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 5$, $b = 8$, $c = 7$, 则 $\cos C =$ _____ .

30. 已知 $\triangle ABC$ 中, $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$, 那么角 C 的大小是 () .

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

31. $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边, 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3} \sin B$, 则 $A =$ () .

- A. 120° B. 60° C. 30° D. 150°

32. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c . 若 $b + c = 2a$, 且 $3 \sin A = 5 \sin B$, 则角 $C =$ () .

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

四、三角形的面积公式

1. 知识讲解

三角形面积公式

$$(1) S = \frac{1}{2} \text{底} \times \text{高}$$

$$(2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$(3) S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)} = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin(C+A)} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)}$$

$$(4) S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (R \text{ 为外接圆半径})$$

$$(5) S = \frac{abc}{4R}$$

$$(6) S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \left(s = \frac{1}{2}(a+b+c)\right); \quad (\text{海伦公式})$$

公式(2)证明:

在 $\triangle ABC$ 中, 边 BC , CA , AB 上的高分别记为 h_a , h_b , h_c , 那么容易证明:

$$h_a = b \sin C = c \sin B,$$

$$h_b = c \sin A = a \sin C,$$

$$h_c = a \sin B = b \sin A.$$

根据三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ah_a$, 应用以上高的公式 $h_a = b \sin C = c \sin B$, 可以推导出下面的三角形的面积公式:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C, \text{ 同理可得 } S = \frac{1}{2}bc \sin A, S = \frac{1}{2}ac \sin B.$$

2. 例题精讲

例1

33. 在三角形 ABC 中, 角 A , B , C 的对边 a , b , c 满足: $a = 2$, $b = 3$, $c = \frac{\pi}{3}$, 则三角形 ABC 的面积为().

A. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
C. $\frac{3}{2}$

B. $3\sqrt{3}$
D. 3

34. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于().

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$

B. $2\sqrt{3}$
D. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

35. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且

$$2S = (a+b)^2 - c^2, \text{ 则 } \tan C = ()$$

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $-\frac{3}{4}$

D. $-\frac{4}{3}$

例4

36. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 且 $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A}$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $a = \sqrt{7}$, $b = 2c$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

37. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C = b$.

(1) 求角 A .

(2) 若 $a = 2\sqrt{3} - 2$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为2, 求边 b , c 的值.

38. $\triangle ABC$ 的内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 已知 $2 \cos C(a \cos B + b \cos A) = c$.

(1) 求角 C .

(2) 若 $c = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 .

3. 课堂巩固

练1

39. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 () .

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$

40. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 则 $\frac{a - 2b + c}{\sin A - 2\sin B + \sin C}$ 的值等于 () .

A. $\frac{26}{3}\sqrt{3}$

B. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

C. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

41. 在 $\triangle ABC$ 中, 面积 $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$, 则角 C 的大小为 _____ .

练4

42. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 且 $b \sin C + 2c \sin B \cos A = 0$.

(1) 求 $\angle A$ 的大小 .

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的大小 .

43. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \sin B = \sqrt{2}b$.

(1) 求角 A 的大小 .

(2) 若 $a = 6$, $b + c = 8$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 .

44. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $c = \sqrt{3}a \sin C - c \cos A$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c .

45. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $b \sin 2A = a \sin B$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 .