

平面向量的基本定理及坐标运算

一、平面向量基本定理与坐标表示

1. 知识讲解

平面向量基本定理

如果 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不同向量共线，那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$ ，有且只有一组实数 λ_1 、 λ_2 ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$ 。

我们把不共线的非零向量 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

【补充说明】

(1) 同一平面内，只要是一组不共线的非零向量，都可以作为基底，基底不同，那么同一向量对基底的分解结果就是不同的。

(2) 平面内任意一个向量都可以用该平面内的一组不共线的非零向量线性表示，这是平面向量基本定理的语言表述。

(3) 若给定了基底，那么分解形式是唯一的，也就是说，当 $\vec{a}$ 、 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 给定，则 λ_1 、 λ_2 有唯一解。

(4) 平面向量基本定理拓展：

对于平面内任意三个不共线的向量中，任何一个向量都可表示为其余两个向量的线性组合且形式唯一。

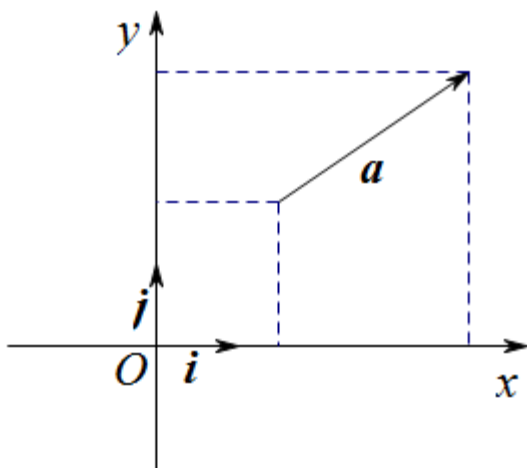
向量的正交分解

由平面向量的基本定理，对平面上的任意向量 $\vec{a}$ ，均可以分解为不共线的两个向量 $\lambda_1 \vec{a}_1$ 和 $\lambda_2 \vec{a}_2$ ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ 。

在不共线的两个向量中，垂直是一种重要的情形。把一个向量分解为两个互相垂直的向量，叫做把向量正交分解。

平面向量的坐标表示

如下图：



在平面直角坐标系中，分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 作为基底．

对于平面内的一个向量 $\vec{a}$ ，由平面向量基本定理可知，有且只有一对实数 x 、 y ，

使得： $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ①

这样，平面内的任一向量 $\vec{a}$ 都可以由 x 、 y 唯一确定，我们把有序数对 (x, y) 叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标，

记作： $\vec{a} = (x, y)$ ②

其中 x 叫做 $\vec{a}$ 在 x 轴上的坐标， y 叫做 $\vec{a}$ 在 y 轴上的坐标，②式叫做向量的坐标表示．

显然， $\vec{i} = (1, 0)$ ， $\vec{j} = (0, 1)$ ， $\vec{0} = (0, 0)$ ．

注意

- (1)向量的坐标与表示向量的有向线段的起点、终点的具体位置无关，只与其相对位置有关.
- (2)当向量确定以后，向量的坐标就是唯一确定的，向量在平移前后坐标不变.
- (3)相等向量的坐标是相同的，但是起点和终点的坐标却不一定相同.

2. 例题精讲

例1

1. 设点 O 是平行四边形 $ABCD$ 两条对角线的交点，给出下列向量组：

① $\vec{AD}$ 与 $\vec{AB}$ ；② $\vec{DA}$ 与 $\vec{BC}$ ；③ $\vec{CA}$ 与 $\vec{DC}$ ；④ $\vec{OD}$ 与 $\vec{OB}$ ．

其中可作为该平面其他向量基底的是（ ）．

- A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ③④

2. 在下列向量组中，可以把向量 $\vec{a} = (3, 2)$ 表示出来的是（ ）．

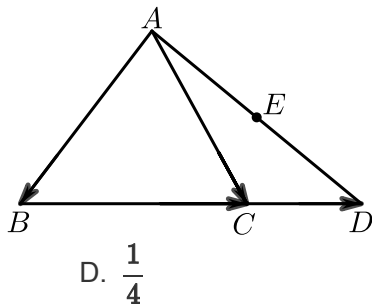
- A. $\vec{e}_1 = (0, 0), \vec{e}_2 = (1, 2)$
 B. $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (5, -2)$
 C. $\vec{e}_1 = (3, 5), \vec{e}_2 = (6, 10)$

D. $\vec{e}_1 = (2, -3), \vec{e}_2 = (-2, 3)$

例2

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 BC 延长线上一点, 点 E 为线段 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD}$, 且

$$\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}, \text{ 则 } \lambda = (\quad).$$



A. $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

3. 课堂巩固

练1

4. 如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内一组不共线的向量, 那么下列四组向量中, 不能作为平面内所有向量的一组基底的是 ().

A. $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

B. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

C. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

D. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

5. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量, 给出下列四个命题:

① $\lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ 可以表示平面内的所有向量;

② 对于平面内的任意向量 $\vec{a}$, 使 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ 的实数 λ, μ 有无数对;

③ 若向 $\lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2$ 与 $\lambda_2 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2$ 共线, 则有且只有一个实数 λ , 使得

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2 = \lambda(\lambda_2 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2);$$

④ 若存在实数 λ, μ , 使 $\lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 = \vec{0}$, 则 $\lambda = \mu = 0$,

其中假命题的是 ().

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. 仅②

练2

6. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{RB}, \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PR}$, 若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $m + n = (\quad)$.

A. 1

B. $\frac{8}{9}$

C. $\frac{7}{9}$

D. $\frac{2}{3}$

二、平面向量的坐标运算

1. 知识讲解

平面向量的坐标运算

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(2) \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$(3) \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$(4) \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

$$(5) |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(6) \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

$$(7) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$(8) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

另外, 对于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 根据向量的减法运算, 则 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, 因此, 一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去始点的坐标.

2. 例题精讲

例1

7. 已知 $\vec{AB} = (3, 4)$, A 点坐标为 $(-2, -1)$, 则 B 点坐标为 ().

A. $(5, 5)$

B. $(-5, -5)$

C. $(1, 3)$

D. $(-5, 5)$

8. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0)$, 那么 $\vec{a} - 2\vec{b} =$ _____.

9. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 若 $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8) (m, n \in \mathbf{R})$, 则 $m - n$ 的值为 _____.

例2

10. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, 则与 $\vec{a}$ 平行的单位向量的坐标为 ().

A. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

C. $(-1, 2)$ D. $(1, 2)$ 18. 已知向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b} = ()$.A. $(5, 7)$ B. $(5, 9)$ C. $(3, 7)$ D. $(3, 9)$ 19. 已知 $\vec{a} = (5, -2)$, $\vec{b} = (-4, -3)$, $\vec{c} = (x, y)$, 若 $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{c}$ 等于 $()$.A. $\left(-\frac{13}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ B. $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ C. $\left(\frac{13}{3}, \frac{8}{3}\right)$ D. $\left(\frac{14}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 练220. 已知点 $A(1, 3)$, $B(4, -1)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 $()$.A. $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ B. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ C. $\left(-\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$ D. $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 21. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{c} = k\vec{a} + \vec{b} (k \in \mathbf{R})$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, 如果 $\vec{c} \parallel \vec{d}$, 那么 $()$.A. $k = 1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向B. $k = 1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向C. $k = -1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向D. $k = -1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向 练322. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-3, 2)$, 若 $(k\vec{a} + \vec{b}) \parallel (\vec{a} - 3\vec{b})$, 则实数 k 的值为 $()$

A. 3

B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$

D. -3

23. 设向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (2, -2)$, 若 $(\lambda\vec{a} + \vec{b}) \perp (\lambda\vec{a} - \vec{b})$, 则实数 $\lambda = ()$.A. ± 1

B. 0

C. $\pm\sqrt{2}$ D. ± 2 24. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, \lambda)$, $\vec{c} = (-3, 2)$.(1) 若 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线, 求实数 λ 的值.(2) 若 $k\vec{a} + \vec{c}$ 与 $\vec{a} - 2\vec{c}$ 垂直, 求实数 k 的值. 练4

25.

已知点 $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = 3$, 则点 P 的坐标为 ().

A. $\left(3, -\frac{11}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$
 C. $\left(2, -\frac{11}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

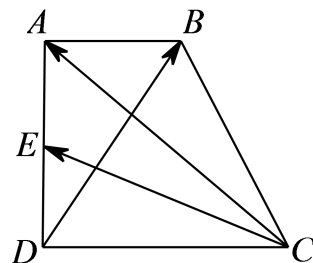
26. 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知两点 $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, 且 $\angle BOP = 90^\circ$. 设 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} (k \in \mathbf{R})$, 则 $|\overrightarrow{OP}| = ()$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 C. $\sqrt{2}$ D. 2

27. 已知 $A(-3, 0)$, $B(0, 2)$, O 为坐标原点, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC = 45^\circ$, 设 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} (\lambda \in \mathbf{R})$ 则 $\lambda = ()$.

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

28. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AD = DC = 2AB$, E 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CE} + \mu\overrightarrow{DB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ().

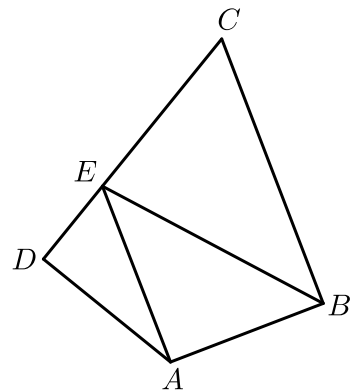


- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

三、综合练习

29. 在直角梯形 $ABCD$ 中, 已知 $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = AD = 4$, $BC = 2$, 若 P 为线段 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 5$, 则 λ 的值为 _____.

30. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$, 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 ().



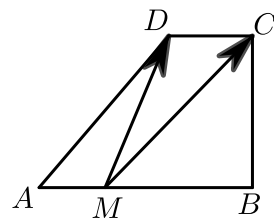
A. $\frac{21}{16}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{25}{16}$

D. 3

31. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AB = AD = 5$ ， $DC = 2$ ， $BC = 4$ ， M 为 AB 边上一点，则 $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}$ 的最小值为（ ）。



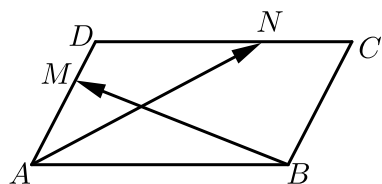
A. 10

B. 12

C. 15

D. 16

32. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ， $AD = 1$ ，若 M 、 N 分别是边 AD 、 CD 上的点，且满足 $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{DC} = \lambda$ ，其中 $\lambda \in [0, 1]$ ，则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的取值范围是（ ）。



A. $[-3, -1]$

B. $[-3, 1]$

C. $[-1, 1]$

D. $[1, 3]$