

平面向量数量积

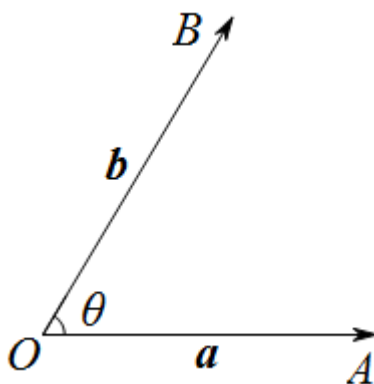
一、平面向量的数量积

1. 知识讲解

📢 向量的夹角

不共线的向量有不同方向，他们的位置关系可用夹角来表示，关于向量的夹角，我们规定：

已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，如下图：



作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。

显然：

(1) 当 $\theta = 0$ 时， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向；当 $\theta = \pi$ 时， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向。

(2) 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$ ，我们说 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。

📢 注意

(1) 向量夹角是针对非零向量说的，因为零向量方向是任意的，因此零向量与其他向量的夹角不固定。

(2) 一定要区别开向量的夹角与直线的夹角，直线夹角的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{2}]$ ，而向量的夹角是 $[0, \pi]$ 。

(3) 确定两个向量的夹角时，一定要使其始点重合，此时成角才是向量的夹角。

📢 平面向量数量积

已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ ，我们把数量 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积（或内积），记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

其中 θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。

我们规定，零向量与任一向量的数量积为0.

对比向量的线性运算，我们发现，向量线性运算的结果是一个向量，而两个向量的数量积是一个数量，而且这个数量的大小与两个向量的长度及其夹角有关.

注意

数量积是向量间的一种特殊运算，它与数量的乘法是有区别的，不能用称号“ $\times$ ”连接，需用实心点“ $\cdot$ ”连接，

平面向量的投影

(1) 对于数量积的运算公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ，我们把 $|\vec{b}| \cos \theta$ 叫做向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影，显然此投影值可正可负也可为0.

(2) 数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义是：数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 $\vec{a}$ 的模长 $|\vec{a}|$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影 $|\vec{b}| \cos \theta$ 的乘积.

显然由投影的表达式， $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影与 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影是不同的.

再次根据数量积的运算公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 可以得到， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影可以写成 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

2. 例题精讲

例1

1. 已知 $|\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{b}| = 4$ ，且向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夹角为 120° ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

【答案】 -6

【解析】
$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ &= 3 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ &= 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义

2. 已知空间 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ， $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 ().

A. 150°

B. 120°

C. 60°

D. 30°

【答案】 B

【解析】 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$,

可得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$,

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 120^\circ,$$

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 120° .

故选 B.

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；利用向量数量积求夹角；向量的数量积的定义；向量的夹角的判断

例2

3. 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影是 ().

A. -2

B. 2

C. -4

D. 4

【答案】 B

【解析】 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 上投影为 } \vec{a} \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = 2.$$

【标注】【知识点】向量的投影

3. 课堂巩固

练1

4. 已知 $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 ().

A. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 C

【解析】 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\
 &= \frac{-10}{5 \times 4} \\
 &= -\frac{1}{2}, \\
 \therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \frac{2\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

5. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 120° , $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$, 且 $|\vec{a}| = 2$, 则 $|\vec{b}| = ()$.
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【答案】 C

【解析】 $\because \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|},$
 $\therefore \cos 120^\circ = \frac{-8}{2 \times |\vec{b}|},$
 解得: $|\vec{b}| = 8,$
 故选C.

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；利用向量数量积求模长；向量的数量积的定义；向量的夹角的判断；向量的模

练2

6. 已知 $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$, 它们的夹角 θ 为 120° , 则向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 ().
- A. 4 B. -4 C. 2 D. -2

【答案】 B

【解析】 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta = 8 \times 4 \times \cos 120^\circ = 32 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -16$
 $\therefore \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为: $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = -4,$
 综上所述, 故B正确.

故选B.

【标注】【知识点】利用投影解决平面向量的数量积；向量的投影

7. 已知 $|\vec{a}| = 2$ ，向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影为 $\sqrt{3}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（ ）.
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】B

【解析】 $|\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sqrt{3}$ ，
 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，
夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

【标注】【知识点】向量的投影；向量的夹角的判断

二、平面向量数量积运算律

1. 知识讲解

平面向量数量积的性质

若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量，则有：

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ ；
2. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ ；
3. 若 θ 为 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角，则有 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ ；
4. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

补充说明

- (1) 性质1可以解决有关向量垂直的问题；
- (2) 利用性质2可以进行向量的求模运算；
- (3) 性质3称为夹角公式，实质是平面向量数量积的逆用，利用此公式可以求解两个向量成角，进而判断向量的位置关系，此公式还可以与三角函数相联系。
- (4) 性质4可以处理有关范围或者最值以及不等式证明的问题。

平面向量数量积运算律

(1)交换律

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

(2)结合律

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$$

(3)分配律

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

(4)应用运算律得到的两个重要结论:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2,$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$$

思考

【探索一】

对于非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ 是否成立呢?

答案是不成立, 证明此处略去, 请读者自行思考.

【探索二】

对于向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, 是否一定有 $\vec{a} = \vec{c}$?

答案也是不成立, 证明此处略去, 请读者自行思考.

2. 例题精讲

例1

8. 下列命题中正确的是 () .

- A. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$
- B. 若 $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$
- C. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{b} = \vec{c}$
- D. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$

【答案】 B

【解析】 $\lambda \vec{a} = \vec{0}$,

$\therefore \lambda = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$.

故选B.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断

11. 向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ().
- A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

【答案】C

【解析】 $\because (\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$,
 $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$,
 $\therefore 2\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 0$,
 $\therefore 2|\vec{a}|^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta - |\vec{b}|^2 = 0$,
 $2 + \sqrt{2} \cos \theta - 2 = 0$,
 $\therefore \cos \theta = 0$,
 $\therefore \theta = 90^\circ$.
故选C.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

12. 已知向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 3$, 若 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \vec{AC}$, 且 $\vec{AP} \perp \vec{BC}$, 则实数 λ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{12}{7}$

【解析】 $\because$ 向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 3$,
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos 120^\circ = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$,
 $\because \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \vec{AC}$, 且 $\vec{AP} \perp \vec{BC}$,
 $\therefore \vec{AP} \cdot \vec{BC} = (\lambda \vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = (\lambda \vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$,
即 $\lambda \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \lambda \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$,
 $\therefore -3\lambda - 4\lambda + 9 + 3 = 0$,
解得 $\lambda = \frac{12}{7}$.
故答案为: $\frac{12}{7}$.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；平面向量数量积的运算律；利用向量数量积求夹角；平面

 例3

13. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足： $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 6$ ， $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2$ ，则 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{38}$

【解析】 $\because \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 = 2$,
 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - |\vec{a}|^2 = 2$,
 $\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2}$,
 $\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{b})^2}$
 $= \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}$
 $= \sqrt{38}$.

【标注】 **【知识点】** 向量的模；平面向量数量积的运算律；利用向量数量积求夹角

14. 已知 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 60° ，则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{21}$

【解析】 $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$
 $= |\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 4|\vec{b}|^2$
 $= 1^2 + 4 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} + 4 \cdot 2^2$
 $= 21$.
 $\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{21}$.

【标注】 **【知识点】** 利用向量数量积求模长；向量的数量积的定义；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的模

 例4

15.

已知单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b} - \vec{a}$ 的夹角是 () .

A. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{3\pi}{4}$

【答案】 D

【解析】 $\because |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$,
 $\therefore (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
 $\therefore |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$,
 $\therefore |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2}$,
 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{a}| |\vec{b} - \vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$,
 $\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$.
 故选: D.

【标注】 【知识点】向量的夹角的判断; 利用向量数量积求夹角

16. 若两个非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 _____ .

【答案】 60°

【解析】 $\because |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$,
 $\therefore \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
 又 $\because |\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a}|$,
 $\therefore \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\vec{a}^2$,
 $\therefore \vec{b}^2 = 3\vec{a}^2$,
 $\therefore |\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$,
 设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 θ ,
 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}|}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot 2|\vec{a}|} \\
 &= \frac{\vec{a}^2}{2|\vec{a}|^2} \\
 &= \frac{1}{2}. \\
 \therefore \theta &= 60^\circ.
 \end{aligned}$$

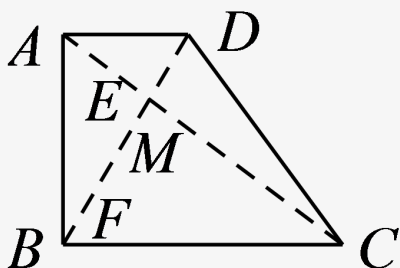
【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；利用向量数量积求夹角

例5

17. 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $AD = 1$, 对角线 AC 与 BD 交于点 M , 点 E 和 F 分别在线段 AM 和 BM 上, 且 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BF} = (1 - \lambda) \overrightarrow{BM}$, 若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}$, 则 $\lambda = ()$.
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}), \\
 &= (\overrightarrow{DA} + \lambda \overrightarrow{AM}) \cdot [\overrightarrow{CB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{BM}], \\
 &= \left(\overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \right) \left[\overrightarrow{CB} + \frac{2(1 - \lambda)}{3} (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AD}) \right], \\
 &= \left[\left(\frac{\lambda}{3} - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{BC} + \frac{\lambda}{3} \overrightarrow{AB} \right] \left[\left(1 - \frac{1 - \lambda}{3} \right) \overrightarrow{CB} + \frac{2(1 - \lambda)}{3} \overrightarrow{BA} \right], \\
 &= \frac{3}{4}, \\
 \text{解得 } \lambda &= \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

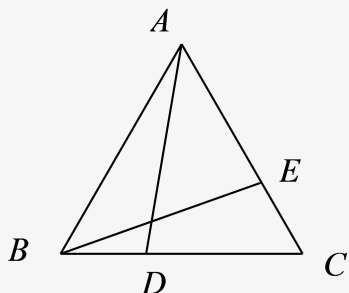
【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；向量的数量积的定义；平面向量数量积的运算律；线性运算和数量积综合问题；线段的定比分点公式；向量分解中的待定系数法

在边长为1的正三角形 ABC 中, 设 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CE}$, 若 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}$, 则 λ 的值为 () .

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

【答案】 D

【解析】 由题意画出图象如图：



$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{BC} &= 2\overrightarrow{BD}, \\ \therefore D &\text{为} BC \text{的中点, 则 } \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \\ \because \overrightarrow{CA} &= \lambda\overrightarrow{CE}, \\ \therefore \overrightarrow{CE} &= \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}, \\ \text{则 } \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \\ \therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} &= -\frac{1}{4}, \\ \therefore \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right] &= -\frac{1}{4}, \\ \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} &= -\frac{1}{2}, \\ \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC}^2 &= -\frac{1}{2}, \\ \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} - 1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) &= -\frac{1}{2}, \\ \text{解得 } \lambda &= 3, \\ \text{故选: D.} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律

3. 课堂巩固

 练1

19. 对于非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 下列命题中正确的是 () .

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$
 B. $\vec{a} // \vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $-|\vec{a}| \vec{e}$ ($\vec{e}$ 是与 $\vec{b}$ 方向相同的单位向量)
 C. $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
 D. $\vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

【答案】 C

【解析】 A 选项: 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 也满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 不能得到

$\vec{a} // \vec{b}$, A 错;

B 选项: $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 可以同向, 也可反向,

$\therefore$ 投影向量为 $-|\vec{a}| \vec{e}$ 或 $|\vec{a}| \vec{e}$, B 错;

C 选项: $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 0$, C 对;

D 选项: $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, $\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$,

可得 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{c}$, D 错.

故选 C.

【标注】 【知识点】平面向量数量积运算 (非坐标); 向量的数量积的定义

20. 已知 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 61$. 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta =$ ____ .

【答案】 120°

【解析】 $\therefore (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 61$,

$$\therefore 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 61,$$

$$\therefore 4|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta - 3|\vec{b}|^2 = 61,$$

$$\therefore 64 - 48\cos\theta - 27 = 61,$$

$$\therefore -48\cos\theta = 24,$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \theta = 120^\circ.$$

【标注】 【知识点】向量的夹角的判断; 利用向量数量积求夹角

21. 非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 若 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 ().
- A. 60° B. 90° C. 120° D. 135°

【答案】C

【解析】 $\because (\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$, $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, 即 $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -4$,

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 120^\circ.$$

故选：C.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；利用向量数量积求夹角

22. 若非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$, 且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角余弦值为 ().
- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】 $\because (\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$,

$$\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 0,$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 0,$$

$$\therefore |\vec{b}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{而 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle,$$

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{|\vec{b}|^2}{\sqrt{3}|\vec{b}|^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选D.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

练3

23. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}$,

$$\text{则 } |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 4 - 1 = 4,$$

$$\text{则 } |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2,$$

故答案为: 2.

【标注】 【知识点】 利用向量数量积求模长; 向量的模

24. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} + \vec{b}| = 4$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = ()$.

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{5}$

C. 3

D. $\sqrt{10}$

【答案】 D

【解析】 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}$

$$= \sqrt{9 + 4 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{16},$$

$$\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3,$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{13 - 3} = \sqrt{10}.$$

综上所述, 答案选择D.

【标注】 【知识点】 向量的模; 向量的数量积的定义; 平面向量数量积运算 (非坐标); 利用向量数量积求模长

练4

25. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为单位向量, 若 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{3}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ().

A. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 B

【解析】 由 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{3}$, 得 $(\vec{a} - 2\vec{b})^2 = 3$,

$$\text{即 } \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 3,$$

设单位向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ,

$$\text{则有 } 1 + 4 - 4\cos\theta = 3,$$

$$\text{解得} \cos \theta = \frac{1}{2},$$

$$\text{又} \theta \in [0, \pi],$$

$$\text{所以} \theta = \frac{\pi}{3}.$$

故选B.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

26. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

【答案】 1

【解析】 $\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{10},$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{6}.$$

平方相减可得： $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, 解得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

故答案为：1.

【标注】【知识点】向量的数量积的定义；利用向量数量积求模长；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的模

27. 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的两个单位向量，其夹角为 60° ，则向量 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{b} - 3\vec{a}$ 的夹角为 _____.

【答案】 120°

【解析】 $\cos \langle 2\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - 3\vec{a} \rangle$

$$= \frac{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{b} - 3\vec{a})}{|2\vec{a} + \vec{b}| \cdot |2\vec{b} - 3\vec{a}|}.$$

$$\text{而} (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{b} - 3\vec{a}) = -\frac{7}{2}$$

$$|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}.$$

$$|2\vec{b} - 3\vec{a}| = \sqrt{7}.$$

$$\therefore \cos \langle 2\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - 3\vec{a} \rangle$$

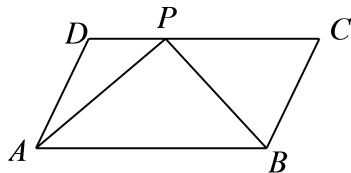
$$= \frac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = -\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 其夹角为 120° .

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

练5

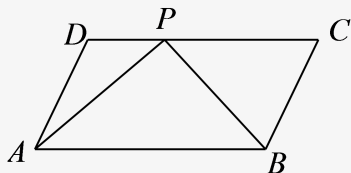
28. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 8$, $AD = 5$, $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值是().



- A. 8 B. 12 C. 22 D. 24

【答案】C

【解析】如图所示,



平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $AD = 5$, $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$,

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AB}^2$$

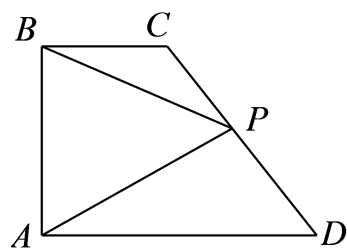
$$= 5^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16} \times 8^2 = 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 22.$$

故选C.

【标注】【知识点】用基底法求向量的数量积

29. 在直角梯形 $ABCD$ 中, 已知 $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = AD = 4$, $BC = 2$, 若 P 为线段 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 5$, 则 $|\overrightarrow{PA}| =$ _____.



【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】 由题意可得, $BC \parallel AD$, $BC = 2$, $AD = 4$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC},$$

因为 P 为 CD 的中点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC} = -\lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}),$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{PD} - 2\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PD} - 2\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}),$$

$$= (\lambda \overrightarrow{BA} + \lambda \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BC})[(1 - \lambda)\overrightarrow{AB} + (2 - \lambda)\overrightarrow{CB}] = 5,$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,$$

$$\text{且 } AB = 4, BC = 2,$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{1}{2};$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{PD} - 2\overrightarrow{BC},$$

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{PD^2 + 4BC^2 - 4\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BC}} = \sqrt{13};$$

故答案为: $\sqrt{13}$.

【标注】 【知识点】 向量的模; 利用向量数量积求模长

三、 综合练习

30. 已知向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是夹角为 60° 的两个单位向量, 且 $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{b} = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

(1) 求数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值.

(2) 求向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角.

【答案】 (1) $-\frac{7}{2}$.

(2) 120° .

【解析】 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned} &= (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \\ &= -6\vec{e}_1^2 + 2\vec{e}_2^2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ &= -6|\vec{e}_1|^2 + 2|\vec{e}_2|^2 + |\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos 60^\circ \\ &= -6 + 2 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |\vec{a}|^2 &= \vec{a}^2 = (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)^2 \\ &= 4\vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ &= 4|\vec{e}_1|^2 + |\vec{e}_2|^2 + 4|\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos 60^\circ \\ &= 4 + 1 + 2 \\ &= 7 \\ \therefore |\vec{a}| &= \sqrt{7} \\ |\vec{b}|^2 &= \vec{b}^2 = (-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)^2 \\ &= 9\vec{e}_1^2 + 4\vec{e}_2^2 - 12\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ &= 9|\vec{e}_1|^2 + 4|\vec{e}_2|^2 - 12|\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos 60^\circ \\ &= 9 + 4 - 6 \\ &= 7 \\ \therefore |\vec{b}| &= \sqrt{7} \\ \therefore \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = -\frac{1}{2}, \\ \therefore \theta &= 120^\circ. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；平面向量数量积的运算律；利用向量数量积求夹角；平面向量数量积运算（非坐标）

31. 已知 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (7\vec{a} + 3\vec{b}) = -6$, $\vec{c} = m\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{d} = 5\vec{a} + m\vec{b}$.

(1) 求 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角.

(2) 当 m 取何值时, $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 共线?

(3) 当 m 为何值时, $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 垂直?

【答案】(1) $\theta = 120^\circ$.

(2) $m = \pm 2\sqrt{5}$.

(3) $m = 1$ 或 $m = 20$.

【解析】(1) 由 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (7\vec{a} + 3\vec{b}) = -6$, 得 $7\vec{a}^2 - 6\vec{b}^2 - 11\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$,

$$\text{即 } 7 \times 1 - 6 \times 4 - 11 \times 1 \times 2 \times \cos \theta = -6,$$

$$\text{解得 } \cos \theta = -\frac{1}{2},$$

$$\because 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ,$$

$$\therefore \theta = 120^\circ.$$

(2) $\because \vec{c} // \vec{d}$,

$$\therefore \text{令 } \vec{c} = \lambda \vec{d},$$

$$\text{即 } m\vec{a} + 4\vec{b} = 5\lambda\vec{a} + \lambda m\vec{b},$$

$$\because \vec{a}, \vec{b} \text{ 不共线},$$

$$\therefore \begin{cases} m = 5\lambda \\ 4 = \lambda m \end{cases}$$

$$\text{解得 } m = \pm 2\sqrt{5}.$$

(3) $\because \vec{c} \perp \vec{d}$,

$$\therefore \vec{c} \cdot \vec{d} = 0,$$

$$\text{即 } (m\vec{a} + 4\vec{b}) \cdot (5\vec{a} + m\vec{b}) = 0,$$

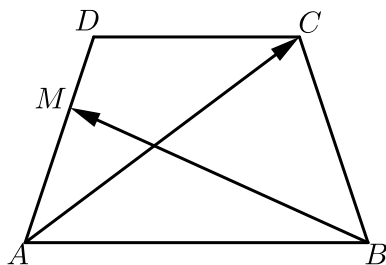
$$\text{得 } 5m\vec{a}^2 + (m^2 + 20)\vec{a} \cdot \vec{b} + 4m\vec{b}^2 = 0,$$

$$\text{即 } m^2 - 21m + 20 = 0,$$

$$\therefore m = 1 \text{ 或 } m = 20.$$

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；向量的数量积的定义；利用向量数量积求夹角；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的数乘运算及运算规则

32. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB // CD$ ， $AB = 4$ ， $AD = 3$ ， $CD = 2$ ， M 是线段 AD 上一点，（可与 A ， D 重合），若 $\vec{AC} \cdot \vec{BM} = -3$ ，则 $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ 的取值范围是 _____.



【答案】 $[-5, 8]$

【解析】 设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AD}$, $\lambda \in [0, 1]$,
 $\therefore \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$,
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$,
 $\therefore \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = (\lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB})$
 $= \lambda \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$,
 $= 9\lambda - 8 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3$,
 $\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \frac{5-9\lambda}{\lambda-2} = -2 \cdot \left(9 + \frac{13}{\lambda-2}\right) \in [-5, 8]$.

【标注】 【知识点】 线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；平面向量数量积的运算律

33. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形，点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F ，使得 $DE = 2EF$ ，则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为（ ）.

A. $-\frac{5}{8}$

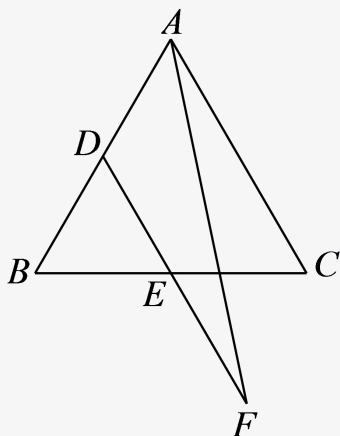
B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{11}{8}$

【答案】 C

【解析】 如图，



$\because D$ 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点，且 $DE = 2EF$ ，
 $\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{DE}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$
 $= \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \left(-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= -\frac{5}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2 \\
&= -\frac{5}{4}|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos 60^\circ + \frac{3}{4} \times 1^2 \\
&= -\frac{5}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{8} . \\
&\text{故选C.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量的数量积的定义

34. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E 、 F 分别在边 BC , CD 上, $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \mu \overrightarrow{DC}$, 若 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值 _____ .

【答案】 3

【解析】 $\because \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \mu \overrightarrow{DC}$, 且 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned}
\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \\
&= (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{DC}) \\
&= (1 + \lambda\mu)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda|\overrightarrow{AD}|^2 + \mu|\overrightarrow{AB}|^2 \\
&= (1 + \lambda\mu) \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4(\lambda + \mu) \\
&= 4(\lambda + \mu) - 2(1 + \lambda\mu) .
\end{aligned}$$

由题意知, $\lambda, \mu > 0$.

$$\because 2\lambda + \mu = \frac{5}{2} .$$

$$\therefore \text{原式} = 4\lambda^2 - 9\lambda + 8 (0 \leq \lambda \leq 1) .$$

$\therefore$ 最小值为 $\lambda = 1$ 时, .

$$\therefore 4\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 3 .$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律