

平面向量数量积

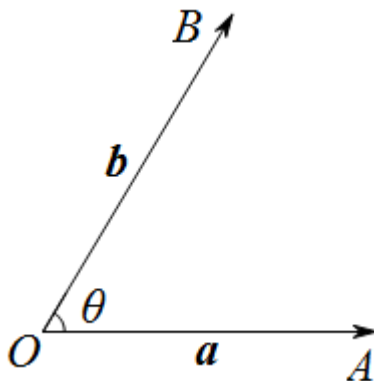
一、平面向量的数量积

1. 知识讲解

📢 向量的夹角

不共线的向量有不同方向，他们的位置关系可用夹角来表示，关于向量的夹角，我们规定：

已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，如下图：



作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。

显然：

(1) 当 $\theta = 0$ 时， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向；当 $\theta = \pi$ 时， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向。

(2) 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$ ，我们说 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。

📢 注意

(1) 向量夹角是针对非零向量说的，因为零向量方向是任意的，因此零向量与其他向量的夹角不固定。

(2) 一定要区别开向量的夹角与直线的夹角，直线夹角的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{2}]$ ，而向量的夹角是 $[0, \pi]$ 。

(3) 确定两个向量的夹角时，一定要使其始点重合，此时成角才是向量的夹角。

📢 平面向量数量积

已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ ，我们把数量 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积（或内积），记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

其中 θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。

我们规定，零向量与任一向量的数量积为0.

对比向量的线性运算，我们发现，向量线性运算的结果是一个向量，而两个向量的数量积是一个数量，而且这个数量的大小与两个向量的长度及其夹角有关.

注意

数量积是向量间的一种特殊运算，它与数量的乘法是有区别的，不能用称号“ $\times$ ”连接，需用实心点“ $\cdot$ ”连接，

平面向量的投影

(1) 对于数量积的运算公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ，我们把 $|\vec{b}| \cos \theta$ 叫做向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影，显然此投影值可正可负也可为0.

(2) 数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义是：数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 $\vec{a}$ 的模长 $|\vec{a}|$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影 $|\vec{b}| \cos \theta$ 的乘积.

显然由投影的表达式， $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影与 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影是不同的.

再次根据数量积的运算公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 可以得到， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影可以写成 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

2. 例题精讲

例1

1. 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ ，且向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 120° ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知空间 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 ().
A. 150° B. 120° C. 60° D. 30°

例2

3. 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ ，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影是 ().
A. -2 B. 2 C. -4 D. 4

3. 课堂巩固

练1

4. 已知 $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$ ，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 ().
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 120° , $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$, 且 $|\vec{a}| = 2$, 则 $|\vec{b}| = ()$.

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

练2

6. 已知 $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$, 它们的夹角 θ 为 120° , 则向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 ().

A. 4

B. -4

C. 2

D. -2

7. 已知 $|\vec{a}| = 2$, 向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影为 $\sqrt{3}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ().

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

二、平面向量数量积运算律

1. 知识讲解

平面向量数量积的性质

若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量, 则有:

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} = 0;$$

$$2. |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}};$$

$$3. \text{若 } \theta \text{ 为 } \vec{a}、\vec{b} \text{ 的夹角, 则有 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

$$4. |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

补充说明

(1) 性质1可以解决有关向量垂直的问题;

(2) 利用性质2可以进行向量的求模运算;

(3) 性质3称为夹角公式, 实质是平面向量数量积的逆用, 利用此公式可以求解两个向量成角, 进而判断向量的位置关系, 此公式还可以与三角函数相联系.

(4) 性质4可以处理有关范围或者最值以及不等式证明的问题.

平面向量数量积运算律

(1) 交换律

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

(2)结合律

$$(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b)$$

(3)分配律

$$(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c.$$

(4)应用运算律得到的两个重要结论:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2,$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

思考

【探索一】

对于非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ 是否成立呢?

答案是不成立, 证明此处略去, 请读者自行思考.

【探索二】

对于向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, 是否一定有 $\vec{a} = \vec{c}$?

答案也是不成立, 证明此处略去, 请读者自行思考.

2. 例题精讲

例1

8. 下列命题中正确的是 ().

A. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$

B. 若 $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$

C. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{b} = \vec{c}$

D. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$

9. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = -6$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ()

A. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{2\pi}{3}$

例2

10. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 满足 $|\vec{b}| = 4|\vec{a}|$, 且 $\vec{a} \perp (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 ().

A. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{2}$
D. $\frac{5\pi}{6}$

11. 向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ().

A. 45°

B. 60°

C. 90°

D. 120°

12. 已知向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 3$, 若 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \vec{AC}$, 且 $\vec{AP} \perp \vec{BC}$, 则实数 λ 的值为 _____.

例3

13. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2$, 则 $|2\vec{a} - \vec{b}| =$ _____.

14. 已知 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 60° , 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____.

例4

15. 已知单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b} - \vec{a}$ 的夹角是 ().

A. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{3\pi}{4}$

16. 若两个非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 _____.

例5

17. 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $AD = 1$, 对角线 AC 与 BD 交于点 M , 点 E 和 F 分别在线段 AM 和 BM 上, 且 $\vec{AE} = \lambda \vec{AM}$, $\vec{BF} = (1 - \lambda) \vec{BM}$, 若 $\vec{DE} \cdot \vec{CF} = \frac{3}{4}$, 则 $\lambda =$ ().

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

18. 在边长为1的正三角形 ABC 中, 设 $\vec{BC} = 2\vec{BD}$, $\vec{CA} = \lambda \vec{CE}$, 若 $\vec{AD} \cdot \vec{BE} = -\frac{1}{4}$, 则 λ 的值为 ().

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. $\frac{1}{3}$

D. 3

3. 课堂巩固

练1

19. 对于非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 下列命题中正确的是 ().

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$

B. $\vec{a} // \vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $-|\vec{a}| \vec{e}$ ($\vec{e}$ 是与 $\vec{b}$ 方向相同的单位向量)

C. $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

D. $\vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

20. 已知 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 61$. 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta =$ _____ .

练2

21. 非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 若 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 () .

A. 60°

B. 90°

C. 120°

D. 135°

22. 若非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$, 且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角余弦值为 () .

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

练3

23. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____ .

24. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ () .

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{5}$

C. 3

D. $\sqrt{10}$

练4

25. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为单位向量, 若 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{3}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 () .

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

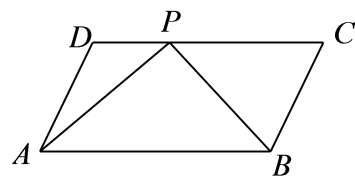
D. $\frac{5\pi}{6}$

26. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ .

27. 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的两个单位向量, 其夹角为 60° , 则向量 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{b} - 3\vec{a}$ 的夹角为 _____ .

练5

28. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 8$, $AD = 5$, $\vec{CP} = 3\vec{PD}$, $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 2$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ 的值是 () .



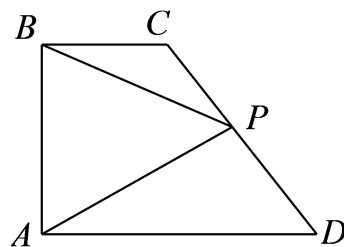
A. 8

B. 12

C. 22

D. 24

29. 在直角梯形 $ABCD$ 中, 已知 $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = AD = 4$, $BC = 2$, 若 P 为线段 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 5$, 则 $|\overrightarrow{PA}| = \underline{\hspace{2cm}}$.



三、综合练习

30. 已知向量 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 是夹角为 60° 的两个单位向量, 且 $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b} = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

(1) 求数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值.

(2) 求向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角.

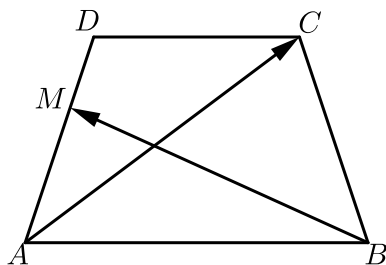
31. 已知 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (7\vec{a} + 3\vec{b}) = -6$, $\vec{c} = m\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{d} = 5\vec{a} + m\vec{b}$.

(1) 求 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角.

(2) 当 m 取何值时, $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 共线?

(3) 当 m 为何值时, $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 垂直?

32. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 3$, $CD = 2$, M 是线段 AD 上一点, (可与 A , D 重合), 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = -3$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



33.

已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形，点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F ，使得 $DE = 2EF$ ，则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为（ ）。

A. $-\frac{5}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{11}{8}$

34. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2， $\angle BAD = 120^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上， $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \mu \overrightarrow{DC}$ ，若 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值 _____。