

平面向量的概念及其线性运算习题

一、选填题

1. 判断下列各命题是否正确.

- (1) 零向量没有方向;
- (2) 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$;
- (3) 单位向量都相等;
- (4) 向量就是有向线段;
- (5) 两相等向量若共起点, 则终点也相同;
- (6) 若 $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$;
- (7) 若 $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $\vec{a} // \vec{c}$;
- (8) 当 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} // \vec{b}$ 时, $\vec{a} = \vec{b}$;
- (9) 若四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则 $\vec{AB} = \vec{CD}$, $\vec{BC} = \vec{DA}$;

正确的命题有 _____.

【答案】 (5)、(6)

【解析】 正确的命题有: (5) (6),

- (1) 不正确, 零向量方向任意;
- (2) 不正确, 说明模相等, 但方向可能不同;
- (3) 不正确, 单位向量的模为1, 方向很多;
- (4) 不正确, 向量只与方向及模的大小有关, 而与起点位置无关, 但有向线段不仅与方向、长度有关, 也与起点的位置有关, 只是我们通常用有向线段表示一个向量;
- (5) 正确;
- (6) 正确, 向量相等有传递性;
- (7) 不正确, 因若 $\vec{b} = \vec{0}$, 则不共线的向量 $\vec{a}$, $\vec{c}$ 也有 $\vec{a} // \vec{0}$, $\vec{0} // \vec{c}$;
- (8) 不正确, 当 $\vec{a} // \vec{b}$, 且方向相反时, 由 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 得到 $\vec{a} = -\vec{b}$;
- (9) 不正确, 应该是 $\vec{AB} = -\vec{CD}$, $\vec{BC} = -\vec{DA}$.

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题; 共线向量; 相等向量与相反向量; 零向量; 单位向量

2. 下列结论正确的是() .

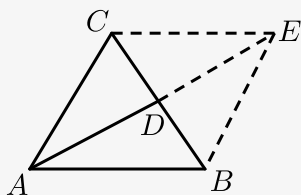
- A. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线, 则向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的方向相同
 B. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 中点, 则 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$
 C. 向量 $\vec{AB}$ 与向量 $\vec{CD}$ 是共线向量, 则 A, B, C, D 四点在一条直线上
 D. 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

【答案】 B

【解析】 A 选项: 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线, 则向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的方向相同或相反, A 错误;

B 选项: $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 中点, 延长 AD 至 E , 使 $AD = DE$, 连接 CE 、 BE ,

则四边形 $ABEC$ 是平行四边形, 如图所示:



所以 $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, B 正确;

C 选项: 向量 $\vec{AB}$ 与向量 $\vec{CD}$ 是共线向量, 当 A, B, C, D 四点不一定在一条直线上,

如图平行四边形的对边是共线向量, 但四点不共线,

C 错误;

D 选项: $\vec{b} = \vec{0}$ 时, 满足 $\vec{a} // \vec{b}$, 但不一定存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, D 错误.

故选 B.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合(非坐标); 平面向量的加法运算及运算规则; 共线向量; 平面向量概念辨析问题

3. 正六边形 $ABCDEF$ 中, $\vec{BA} + \vec{CD} + \vec{EF}$ 等于() .

- A. $\vec{CF}$ B. $\vec{BE}$
 C. $\vec{AD}$ D. $\vec{0}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 在正六边形 $ABCDEF$ 中, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$,
 $\therefore \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF}$.

故选A.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 等于 ().

A. $\vec{a} + \vec{b}$

B. $-\vec{a} - \vec{b}$

C. $\vec{a} - \vec{b}$

D. $\vec{b} - \vec{a}$

【答案】 B

【解析】 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = -(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = -\vec{a} - \vec{b}$.

故选：B.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

5. 已知 $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$, 则 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ 等于 ().

A. $4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

B. $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

C. $4\vec{e}_1 - 19\vec{e}_2$

D. $4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

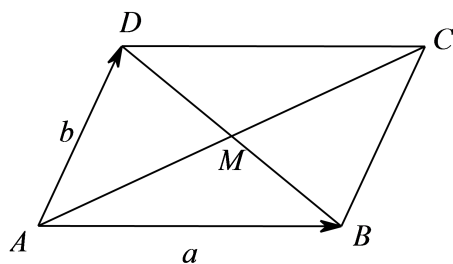
【答案】 D

【解析】 $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) - 2(\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

故选D.

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

6. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M , 且 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{MD} =$ ().



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
 B. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
 C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
 D. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

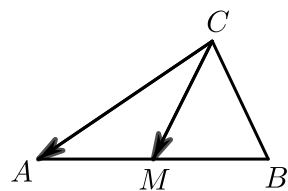
$\because$ 两条对角线相交于点 M , 可得 M 是 AC 、 BD 的中点

$$\therefore \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

故选: D.

【标注】 【知识点】 平面向量基本定理及其意义; 向量分解中的待定系数法

7. 如图, M 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, 若 $\overrightarrow{CM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{CB} = ()$.



- A. $2\vec{a} + \vec{b}$
 B. $2\vec{a} - \vec{b}$
 C. $\vec{a} + 2\vec{b}$
 D. $\vec{a} - 2\vec{b}$

【答案】 B

【解析】 $\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\vec{b} + \overrightarrow{CB}}{2},$

$$\vec{a} = \frac{\vec{b} + \overrightarrow{CB}}{2}, \overrightarrow{CB} = 2\vec{a} - \vec{b}.$$

故选择 B.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

8. 四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ，则四边形 $ABCD$ 一定是（ ）
- A. 矩形 B. 菱形 C. 正方形 D. 平行四边形

【答案】D

【解析】平行四边形法则内容， $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ 。

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

9. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内不共线两向量，已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1 - k\vec{e}_2$ ， $\overrightarrow{CB} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ， $\overrightarrow{CD} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ，若 A, B, D 三点共线，则 k 的值是（ ）。
- A. 2 B. -3 C. -2 D. 3

【答案】A

【解析】 $\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = (3\vec{e}_1 - \vec{e}_2) - (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ ， A, B, D 三点共线，即 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BD}$ ，
 $\therefore \vec{e}_1 - k\vec{e}_2 = \lambda(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)$ ，
 $\therefore k = 2$ ，选A。

【标注】【知识点】共线向量；平面向量中的三点共线问题

二、解答题

10. 化简：

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FA} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\overrightarrow{AC}$ ； $\vec{0}$ ； $\vec{0}$

【解析】答案见题干

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；零向量

11. 设两个非零向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线, 如果 $\vec{AB} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{BC} = 2\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2, \vec{CD} = 3(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$.

(1) 求证: A, B, D 三点共线.

(2) 试确定实数 k 的值, 使 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$ 共线.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $k = \pm 1$.

【解析】(1) $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = 6\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 = 6\vec{AB}$, 所以 A, B, D 三点共线.

(2) 由于 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2 // \vec{e}_1 + k\vec{e}_2$, 则 $k^2 = 1$, 解得 $k = \pm 1$.

【标注】【知识点】共线向量；平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量中的三点共线问题；平面向量线性运算综合（非坐标）