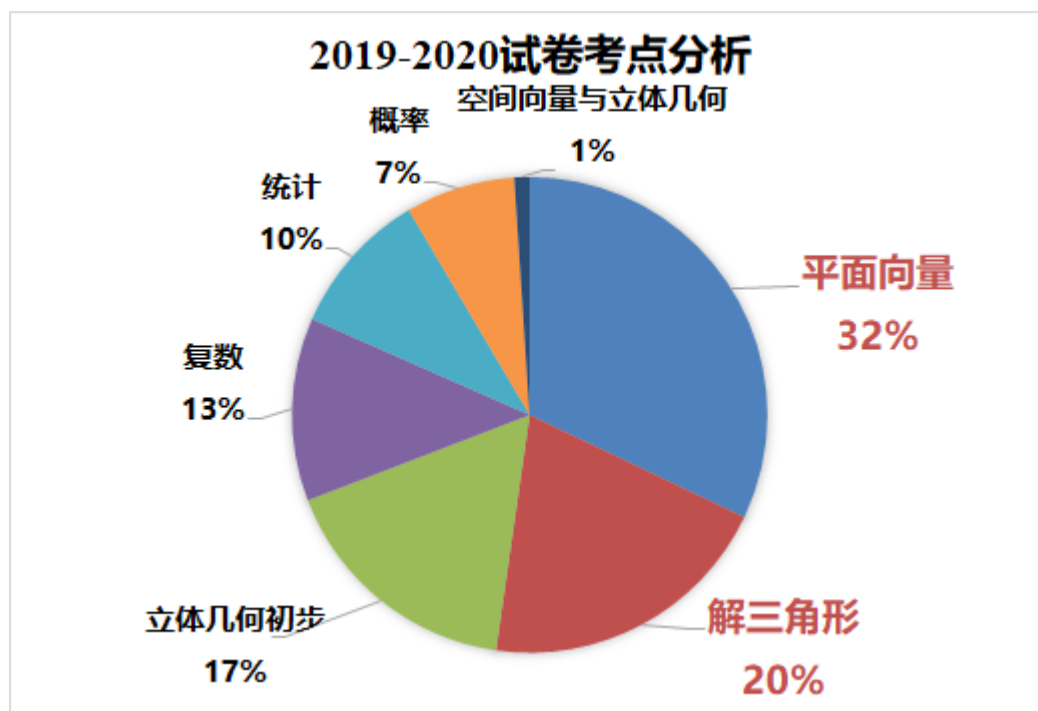


平面向量的概念及其线性运算

1. 考点分析

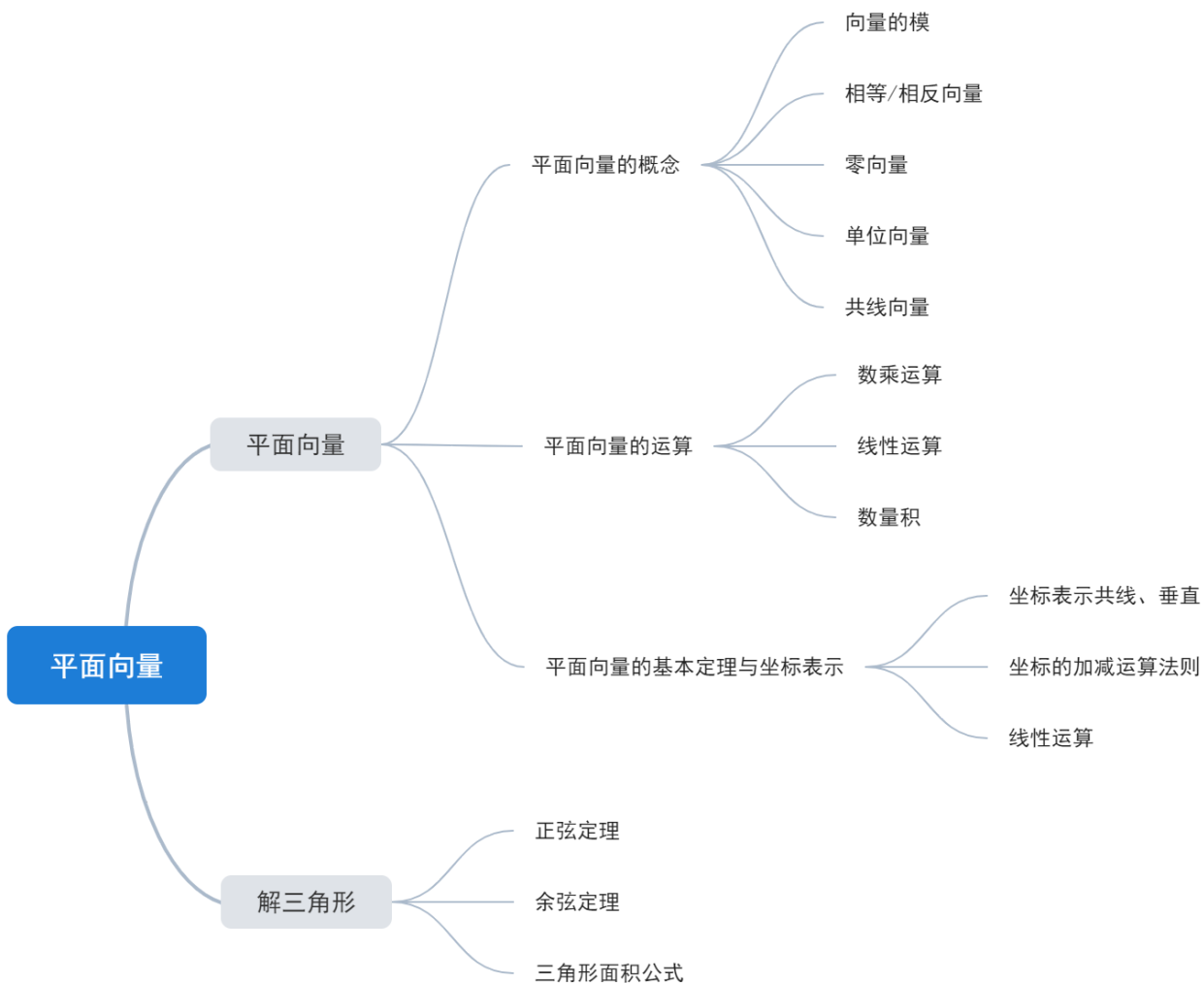
考点占比



考点分析

2019-2020试卷考点分析（50份试卷）			
模块	章节	考点	考察频次
平面向量	平面向量	平面向量的运算	264
		平面向量基本定理及其坐标表示	136
		平面向量的基本概念	133
	解三角形	正弦定理	145
		余弦定理	134
		三角形面积公式	65
		解三角形的实际应用	23

知识梳理



一、平面向量的相关概念

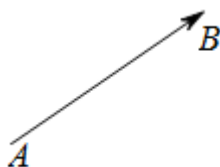
1. 知识讲解

1.向量的概念：平面中有大小、有方向的量.

2.向量的表示：

①几何表示法：用有向线段表示向量，有向线段的方向表示向量的方向，线段的长度表示向量的长度．

②字母表示法： $\vec{AB}$ ，注意起点在前，终点在后．



3. 相等和相反向量：

①相等向量（同一向量）：长度相等且方向相同的向量，记作 $\vec{a} = \vec{b}$.

②相反向量：长度相等且方向相反的向量，记作 $\vec{a} = -\vec{b}$.

4. 共线或平行向量：

基线：通过有向线段 $\vec{AB}$ 的直线，称为向量 $\vec{AB}$ 的基线 .

如果向量的基线互相平行或重合，则称这些向量共线或平行 .

向量 $\vec{a}$ 平行于向量 $\vec{b}$ ，记作 $\vec{a} // \vec{b}$.

5. 零向量：长度等于零的向量，叫做零向量 . 记作： $\vec{0}$.

零向量的方向不确定，零向量与任意向量平行 .

6. 单位向量：长度等于1的向量叫做单位向量 .

7. 向量的模：向量 $\vec{AB}$ 的大小(或长度)叫做向量的模，记作 $|\vec{AB}|$.

2. 例题精讲

例1

1. 判断下列四个命题：①若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；②若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；③若 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} > \vec{b}$ ；④若 $\vec{a} // \vec{b}$ ， $\vec{b} // \vec{c}$ ，则 $\vec{a} // \vec{c}$. 其中正确的个数是 _____ .

2. 下列给出的命题正确的是（ ） .

- A. 两个向量的模相等，则这两个向量的长度相等且方向相同或相反
- B. 两个共线的向量，其方向一定相同
- C. 若两个向量不共线，则这两个向量都是非零向量
- D. 两个有共同起点的共线向量，其终点一定相同

3. ①模相等的两个平行向量是相等向量；

②若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；

③两个相等向量的模相等；

④相等向量一定是共线向量；

⑤共线向量一定是相等向量；

⑥任一向量与它的相反向量不相等；

⑦向量 $\vec{AB}$ 与向量 $\vec{CD}$ 是共线向量，则点 A, B, C, D 必在同一条直线上；

⑧设 O 是正 $\triangle ABC$ 的中心，则向量 $\vec{AO}, \vec{BO}, \vec{CO}$ 是模相等的向量；

⑨若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线， $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 也共线 .

正确的个数为（ ） .

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

3. 课堂巩固

练1

4. 下列等式：① $\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}$ ，② $-(-\vec{a}) = \vec{a}$ ，③ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ，④ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ，
⑤ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ，⑥ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. 正确的个数是 () .
- A. 3个 B. 4个 C. 5个 D. 6个

5. 给出下列命题：

- ①两个向量相等，则它们的起点相同，终点相同；
②若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；
③若 $\vec{AB} = \vec{DC}$ ，则 $ABCD$ 为平行四边形；
④在平行四边形 $ABCD$ 中，一定有 $\vec{AB} = \vec{DC}$ ；
⑤若 $\vec{m} = \vec{n}$ ， $\vec{n} = \vec{p}$ ，则 $\vec{m} = \vec{p}$.

其中不正确的个数是 () .

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

6. 以下命题：① $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$ 是否相等与 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的方向无关；②两个具有公共终点的向量，一定是共线向量；③两个向量不能比较大小，但它们的模能比较大小；④单位向量都是共线向量 . 其中正确命题的个数是 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

7. 下列命题正确的是 () .

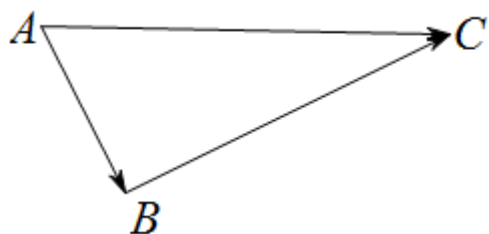
- A. 若 $|\vec{a}| = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$
B. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$
C. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为平行向量，则 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 同向
D. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为单位向量，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

二、平面向量的线性运算

1. 知识讲解

加法

如下图：

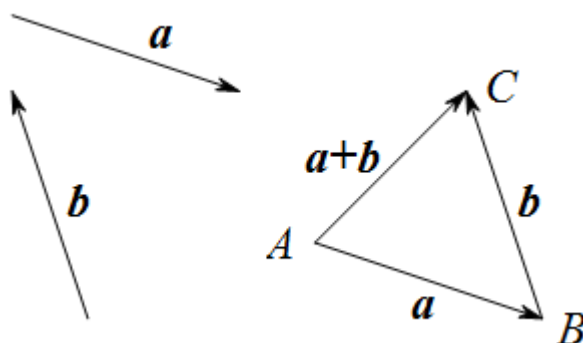


某对象从A点经B点到C点，两次位移 $\vec{AB}$ 、 $\vec{BC}$ 的结果，与A点直接到C点的位移 $\vec{AC}$ 结果相同。

数的加法启发我们，从运算的角度看， $\vec{AC}$ 可以认为是 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BC}$ 的和，因此，位移的合成可以看作向量的加法。

(1) 三角形法则：

如下图：



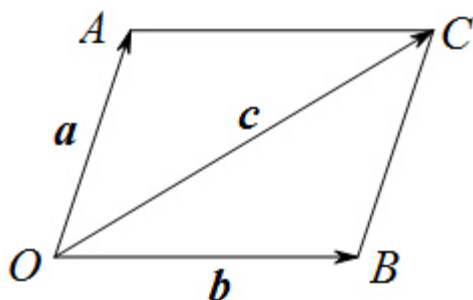
已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，在平面内任取一点A，作 $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{BC} = \vec{b}$ ，则向量 $\vec{AC}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{a} + \vec{b}$ ，即 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ 。

求两个向量和的运算，叫做向量的加法。这种求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则。

位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型。

(2) 平行四边形法则：

如下图：



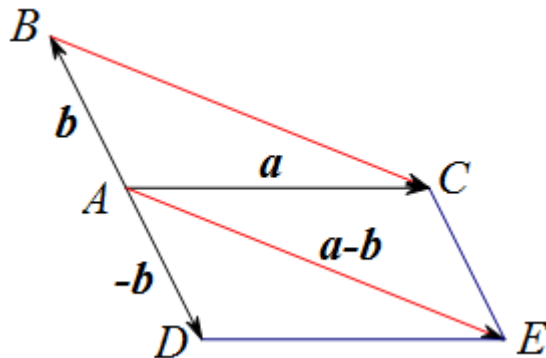
以同一点O为起点的两个已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为邻边作ABCD，则以O为起点的对角线 $\vec{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则。

(3) 向量的多边形求和法则：

已知 n 个向量，依次把这 n 个向量首尾相连，以第一个向量的始点为始点，第 n 个向量的终点为终点的向量叫做这个向量的和向量．这个法则叫做向量求和的多边形法则．

减法

如下图：

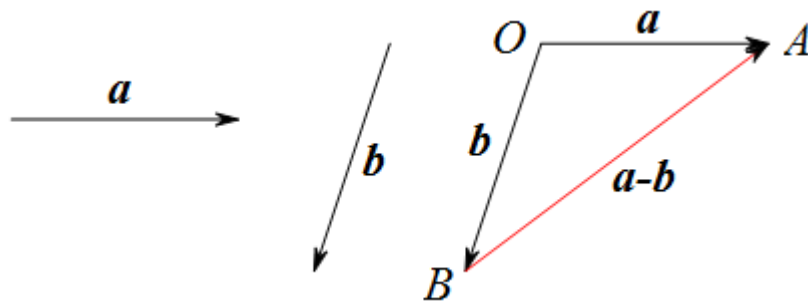


设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ，则 $\overrightarrow{AD} = -\vec{b}$ ，由向量减法的定义知，
 $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$ ．

又 $\vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，所以 $\overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$ ．

由此我们得到 $\vec{a} - \vec{b}$ 的作图方法．

如下图：



已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，在平面内任取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ ．即 $\vec{a} - \vec{b}$ 可以表示为从向量 $\vec{b}$ 的终点指向向量 $\vec{a}$ 的终点的向量，这是向量减法的几何意义．

数乘运算

1、定义：实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\vec{a}$ ，且 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ ．
 当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ ．

2、运算法则

设 λ 、 μ 为实数，那么：

$$(1) \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a};$$

- (2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
 (3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
 (4) $(-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a})$.

2. 例题精讲

例1

8. 计算 .

- (1) $(-3) \times 4\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 (2) $3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 (3) $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) - (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

例2

9. 下列关于向量知识的选项中, 不正确的为 () .

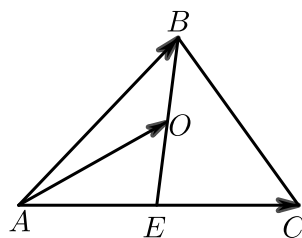
- A. $\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC}$
 B. 单位向量的模长都相等
 C. $|\vec{AO}| - |\vec{CO}| \leq |\vec{AC}|$
 D. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AC} = \vec{BD}$

10. 下列各式化简正确的是 () .

- A. $\vec{OA} - \vec{OD} + \vec{DA} = \vec{0}$
 B. $\vec{AB} + \vec{MB} + \vec{BO} + \vec{OM} = \vec{AB}$
 C. $\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{AC} = \vec{0}$
 D. $\vec{0} \cdot \vec{AB} = 0$

例3

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BE 是边 AC 的中线, O 是 BE 的中点, 若向量 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, 则 $\vec{AO} = ()$.

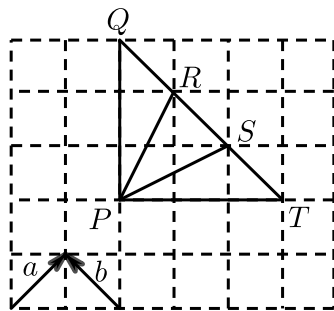


- A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

- B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
 C. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
 D. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

12. 如图所示, 下列结论正确的是 ().

① $\vec{PQ} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$; ② $\vec{PT} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$; ③ $\vec{PS} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; ④ $\vec{PR} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$.



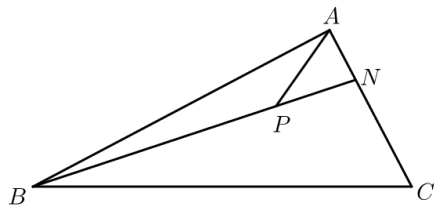
- A. ①② B. ③④ C. ①③ D. ②④

13. 已知 $\triangle ABC$ 和点 M 满足 $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. 若存在实数 m 使得 $\vec{AB} + \vec{AC} = m\vec{AM}$ 成立, 则 $m = ()$.

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

例4

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{NC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + \frac{2}{9}\vec{AC}$, 则实数 m 的值为 ().



- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 3

15. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AR} = 2\vec{RB}$, $\vec{CP} = 2\vec{PR}$, 若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$, 则 $m + n = ()$.

- A. 1 B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 课堂巩固

练1

16. $(4\vec{a} - 3\vec{b}) + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{4}(6\vec{a} - 7\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

17.

已知 $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$, 则 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ 等于 ().

- A. $4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- B. $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- C. $4\vec{e}_1 - 19\vec{e}_2$
- D. $4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

练2

18. 下列各式不能化简为 $\vec{AD}$ 的是 ().

- A. $(\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{BC}$
- B. $(\vec{AD} + \vec{MB}) + (\vec{BC} + \vec{CM})$
- C. $(\vec{MB} + \vec{AD}) - \vec{BM}$
- D. $(\vec{OC} - \vec{OA}) + \vec{CD}$

19. 已知平面上不共线的四点 O, A, B, C , 若 $\vec{OA} - 3\vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0}$, 则 $\frac{|\vec{AB}|}{|\vec{BC}|} = \underline{\hspace{2cm}}$.

练3

20. 在 $\triangle ABC$ 中, AM 为 BC 边上的中线, 点 N 满足 $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{NM}$, 则 $\vec{BN} = ()$.

- A. $\frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{5}{6}\vec{AB}$
- B. $\frac{5}{6}\vec{AC} - \frac{1}{6}\vec{AB}$
- C. $\frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{5}{6}\vec{AB}$
- D. $\frac{5}{6}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AB}$

21. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} = \vec{0}$, $\vec{BD} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, 则 $\vec{AD} + \vec{AP} = ()$.

- A. $\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$
- B. $\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$
- C. $\frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$
- D. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AC}$

22. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别 BC, CA, AB 的中点, 点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则

$\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}$ 等于 ().

A. $\vec{0}$

B. $4\vec{MD}$

C. $4\vec{ME}$

D. $4\vec{MF}$

练4

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\vec{AD} = 2\vec{DB}$, $\vec{CD} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \lambda\vec{CB}$, 则 $\lambda = ()$.

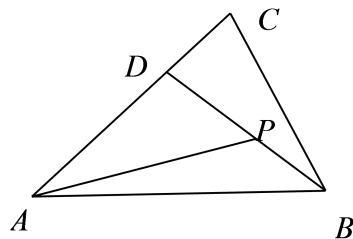
A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC}$, $\vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{BD}$, 若 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 $()$.



A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

三、共线向量定理及推论

1. 知识讲解

共线基本定理

向量共线的判定定理:

对于向量 $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)、 $\vec{a}$, 如果有一个实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, 那么由向量数乘的定义知, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线.

向量共线的性质定理:

向量 $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)与 $\vec{a}$ 共线, 当且仅当有唯一的一个实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

推论:

若A、B、C三点共线, 当且仅当存在唯一的一个实数 λ , 使得 $\vec{AB} = \lambda\vec{AC}$.

2. 例题精讲

例1

请证明如下结论:

对任意两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 若存在不全为0的实数对 (λ, μ) , 使 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线.

【提示】仍然是采取分类讨论的策略.

例2

25. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零不共线向量, 向量 $8\vec{a} - k\vec{b}$ 与 $-k\vec{a} + \vec{b}$ 共线, 则 $k = ()$.

- A. $2\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $\pm 2\sqrt{2}$ D. 8

例3

26. O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, $\vec{AD} = t\vec{AC}$, 若 B, O, D 三点共线, 则 t 的值为 $()$.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

例4

27. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线向量, 已知 $\vec{AB} = 2\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$, $\vec{CB} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{CD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, 若 A, B, D 三点共线, 求实数 k 的值.

3. 课堂巩固

练1

28. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线的充要条件是 $()$.

- A. $\vec{a}, \vec{b}$ 方向相同
B. $\vec{a}, \vec{b}$ 两向量中至少有一个为零向量
C. 存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$
D. 存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 , 使得 $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \vec{0}$

练2

29. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个不共线的向量, 且向量 $m\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{a} + (2-m)\vec{b}$ 共线, 则实数 m 的值为 _____.

练3

30. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是不共线的向量, $\vec{AB} = \vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{BC} = -2\vec{a} + 8\vec{b}$, $\vec{CD} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$, 则 $()$.

- A. A, B, D 三点共线 B. A, B, C 三点共线

C. B, C, D 三点共线

D. A, C, D 三点共线

31. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$, 其中 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 则四边形 $ABCD$ 为 ().

A. 梯形

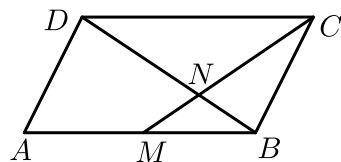
B. 平行四边形

C. 菱形

D. 矩形

 练4

32. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, M 是 AB 的中点, 点 N 在对角线 BD 上, 且 $BN = \frac{1}{3}BD$. 求证: M, N, C 三点共线.



33. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是不共线的两个向量, 已知 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$, $\overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\overrightarrow{CD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
- (1) 求证: A, B, D 三点共线.
- (2) 若 $\overrightarrow{BF} = 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$, 且 B, D, F 三点共线, 求 k 的值.