

2020天津一中高二期末

一、选择题

1 若直线 $l_1: x + ay + 6 = 0$ 与 $l_2: (a - 2)x + 3y + 2a = 0$ 平行, 则 l_1 与 l_2 间的距离为().

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

答案 B

解析 $\frac{1}{a} = \frac{a-2}{3} \Rightarrow a = -1, a = 3$ (舍),
 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{18 - 2}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

故选B.

2 曲线 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与曲线 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1 (k < 9)$ 的().

- A. 长轴长相等 B. 短轴长相等 C. 离心率相等 D. 焦距相等

答案 D

解析 曲线 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 表示焦点在 x 轴上, 长轴长为10, 短轴长为6,
 离心率为 $\frac{4}{5}$, 焦距为8.

曲线 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1 (k < 9)$ 表示焦点在 x 轴上,
 长轴长为 $2\sqrt{25-k}$, 短轴长为 $2\sqrt{9-k}$,

离心率为 $\frac{4}{\sqrt{25-k}}$, 焦距为8.

对照选项, 则D正确.

故选D.

3

已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“ $S_n < na_n$ 对 $n \geq 2$ 恒成立”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的() .

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 由等差数列的性质， $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ，
所以 $\frac{n(a_1 + a_n)}{2} < na_n$ ，解得 $a_1 < a_n$ ，
故 $d > 0$ ，
所以是充分必要条件 .

4 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 ，公差为 -1 的等差数列， S_n 为其前 n 项和，若 S_1, S_2, S_4 成等比数列，则 $a_1 =$ () .

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

答案 D

解析 方法一： $\because S_2^2 = S_1 S_4 \therefore (a_1 + a_1 - 1)^2 = a_1(4a_1 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3) \therefore a_1 = -\frac{1}{2}$ ，故选D .
方法二： $\because \{a_n\}$ 是首项为 a_1 ，公差为 -1 的等差数列， S_n 为其前 n 项和，
 $\therefore S_1 = a_1$ ， $S_2 = 2a_1 - 1$ ， $S_4 = 4a_1 - 6$ ，
由 S_1, S_2, S_4 成等比数列，得： $S_2^2 = S_1 \cdot S_4$ ，
即 $(2a_1 - 1)^2 = a_1(4a_1 - 6)$ ，解得： $a_1 = -\frac{1}{2}$.
故选D .

5 已知直线 $(2a + 1)x + (3a - 1)y - 4a + 3 = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 恒过定点 p ，则过点 p 抛物线的标准方程是 () .

- A. $y^2 = -\frac{1}{2}x$ 或 $x^2 = 4y$ B. $x^2 = -\frac{1}{2}y$ 或 $y^2 = 4x$
C. $x^2 = \frac{1}{2}y$ 或 $y^2 = -4x$ D. $y^2 = \frac{1}{2}x$ 或 $x^2 = -4y$

答案 C

解析 直线 $(2a+1)x + (3a-1)y - 4a + 3 = 0$

$$2ax + x + 3ay - y - 4a + 3 = 0$$

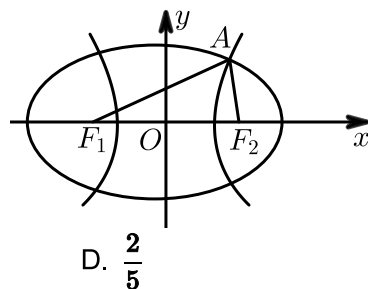
$$a(2x + 3y - 4) + x - y + 3 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

恒过定点 $(-1, 2)$ ，则过点 P 的抛物线的标准方程为 $x^2 = \frac{1}{2}y$ 或 $y^2 = -4x$.

- 6 如图 F_1, F_2 是双曲线 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 与椭圆 C_2 的公共焦点，点 A 是 C_1, C_2 在第一象限内的公共点，若 $|F_1F_2| = |F_1A|$ ，则 C_2 的离心率是 () .



A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

答案 C

解析 由题意 F_1, F_2 是双曲线 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ ，

与椭圆 C_2 的公共焦点可知， $|F_1F_2| = |F_1A| = 6$ ，

$$\therefore |F_1A| - |F_2A| = 2,$$

$$\therefore |F_2A| = 4,$$

$$\therefore |F_1A| + |F_2A| = 10,$$

$$\therefore 2a = 10,$$

$$\therefore C_2 \text{ 的离心率是 } \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

故选 C .

已知 $\{a_n\}$ 是首项为1的等比数列， S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $9S_3 = S_6$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前5项和为（ ）。

- A. $\frac{15}{8}$ 或5 B. $\frac{31}{16}$ 或5 C. $\frac{31}{16}$ D. $\frac{15}{8}$

答案 C

解析 显然 $q \neq 1$ ，所以 $\frac{9(1-q^3)}{1-q} = \frac{1-q^6}{1-q} \Rightarrow 1+q^3=9 \Rightarrow q=2$ ，

所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

$$\text{前5项和} T_5 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{16}.$$

故选C.

8 已知 a 为常数，若曲线 $y = ax^2 + 3x - \ln x$ 存在与直线 $x + y - 1 = 0$ 垂直的切线，则实数 a 的取值范围是（ ）。

- A. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1]$

答案 A

解析 由 $y = ax^2 + 3x - \ln x$ ，得 $y' = 2ax + 3 - \frac{1}{x}$ ，其中 $x > 0$ ，

由题意， $x + y - 1 = 0$ 的斜率是 -1 ，则与直线 $x + y - 1 = 0$ 垂直的切线的斜率是1，

$$\therefore 2ax + 3 - \frac{1}{x} = 1 \text{ 有正根，}$$

$$\therefore 2a = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1 \text{ 有正根，}$$

$$\therefore 2a \geq -1, \text{ 即 } a \geq -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

故选A.

9 已知点 P 是抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 上的一个动点，则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为（ ）。

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5} - 1$

D. $\sqrt{5} + 1$

答案 C

解析 抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ ，可得： $y^2 = 4x$ ，抛物线的焦点坐标 $(1, 0)$ ，
依题意点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值，
就是 P 到 $(0, 2)$ 与 P 到该抛物线准线的距离之和减去 1，
由抛物线的定义，可得则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与 P 到该抛物线焦点坐标的距离之和减 1，
可得： $\sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2} - 1 = \sqrt{5} - 1$ 。
故选 C。

10 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得

$|PF_1| + |PF_2| = 3b$ ， $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$ ，则该双曲线的离心率为 ()。

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{9}{4}$

D. 3

答案 B

解析 由已知得 $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$ ，又 $(|PF_1| + |PF_2|)^2 - (|PF_1| - |PF_2|)^2 = 9b^2 - 4a^2$ ，即
 $4|PF_1| \cdot |PF_2| = 9b^2 - 4a^2$ ，又因为 $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$ ，所以 $9b^2 - 4a^2 = 9ab$ ，即
 $9(\frac{b}{a})^2 - 9(\frac{b}{a}) - 4 = 0$ ，解得 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ ，于是 $e = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} = \frac{5}{3}$ ，故答案为 B。

二、填空题

11 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ ，则 $a_2 =$ _____， $a_{10} =$ _____。

答案 1:3

2:1023

解析

$a_2 = 2a_1 + 1 = 3$, $a_3 = 2a_2 + 1 = 7$, $a_4 = 15$, $a_5 = 31$, 可以推断 $a_n = 2^n - 1$, $a_{10} = 1023$.

12 若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0$ ($a > 0$) 的公共弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.

答案 1

解析 圆 $x^2 + y^2 = 4$, 圆心 $O_1(0, 0)$, 半径 $r = 2$,
圆 $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0$ ($a > 0$) 即 $x^2 + (y + a)^2 = 6 + a^2$ 圆心 $O_2(0, -a)$,
半径 $r = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 24} = \sqrt{a^2 + 6}$,
两个圆的公共弦的方程为: $x^2 + y^2 + 2ay - 6 - (x^2 + y^2) = -4$,
则 $y = \frac{1}{a}$,
由已知条件得 $\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{a}$, 即 $a = 1$.

13 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线均和圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相切, 且双曲线的右焦点为圆 C 的圆心, 则该双曲线的方程为 _____.

答案 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

解析 将圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 化为标准方程, 得 $(x - 3)^2 + y^2 = 4$,
∴ 圆心为 $C(3, 0)$, 半径 $r = 2$,
∴ 双曲线的右焦点为圆 C 圆心,
∴ $c = 3$, 可得 $a^2 + b^2 = 9 \cdots \textcircled{1}$,
又 ∵ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条渐近线均为圆相切,
∴ 点 $C(3, 0)$ 到直线 $bx \pm ay = 0$ 的距离等于半径, 即 $\frac{|3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \cdots \textcircled{2}$,
联立解 $\textcircled{1}\textcircled{2}$, 得 $a = \sqrt{5}$, $b = 2$,
∴ 该双曲线的方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$,
故答案为: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

14 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} - a_n = n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前10项和为 _____ .

答案 $\frac{20}{11}$

解析 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} - a_n = n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = n + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

当 $n = 1$ 时，上式也成立，

$$\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和

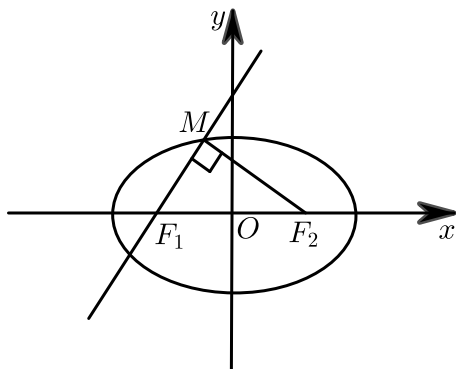
$$S_n = 2 \times \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}.$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 前10项的和为 $\frac{20}{11}$.

15 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，焦距为 $2c$ ，若直线 $y = \sqrt{3}(x + c)$ 与椭圆 Γ 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2 = 2\angle MF_2F_1$ ，则该椭圆的离心率等于 _____ .

答案 $\sqrt{3} - 1$

解析 已知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$



直线 $y = \sqrt{3}(x + c)$ 过点 F_1 ，且斜率为 $\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 倾斜角 $\angle MF_1F_2 = 60^\circ$.

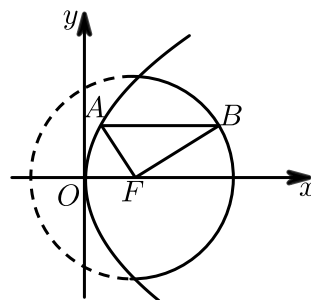
$$\therefore \angle MF_2F_1 = \frac{1}{2} \angle MF_1F_2 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle F_1MF_2 = 90^\circ \therefore |MF_1| = c, |MF_2| = \sqrt{3}c.$$

由椭圆定义知 $|MF_1| + |MF_2| = c + \sqrt{3}c = 2a$,

$$\therefore \text{离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

- 16 如图所示, 点 F 是抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点, 点 A, B 分别在抛物线 $y^2 = 8x$ 及圆 $(x-2)^2 + y^2 = 16$ 的实线部分上运动, 且 AB 总是平行于 x 轴, 则 $\triangle FAB$ 的周长的取值范围是 _____.



答案 (8, 12)

解析 抛物线的准线 $l: x = -2$, 焦点 $F(2, 0)$,

由抛物线定义可得: $|AF| = x_A + 2$,

$$\therefore \triangle FAB \text{ 的周长} = |AF| + |AB| + |BF| = x_A + 2 + (x_B - x_A) + 4 = 6 + x_B,$$

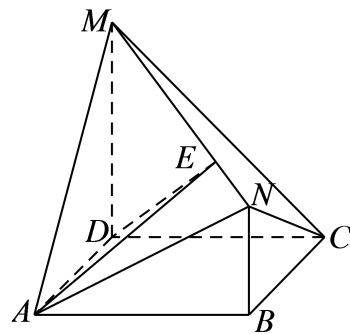
由抛物线 $y^2 = 8x$ 及圆 $(x-2)^2 + y^2 = 16$, 得交点的坐标为 2,

$$\therefore x_B \in (2, 6), \therefore 6 + x_B \in (8, 12),$$

$\therefore \triangle FAB$ 的周长的取值范围是 $(8, 12)$.

三、解答题

- 17 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $MD \perp$ 平面 $ABCD$, $NB \parallel MD$, 且 $NB = 1$, $MD = 2$.



- 答案

- $$(2) \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} .$$

$$(3) \quad \frac{ME}{MN} = \frac{2}{3}.$$

解析

- $$\therefore \overrightarrow{AN} = (0, 2, 1) ,$$

$$\overrightarrow{MN} = (2, 2, -1), \overrightarrow{MC} = (0, 2, -2)$$

设平面 MNC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}, \text{令 } z = 2, \text{ 则 } \vec{n} = (-1, 2, 2)$$

设 AN 与平面 MNC 所成角为 θ ,

$$\therefore \sin \theta = \left| \cos(\overrightarrow{AN}, \vec{n}) \right| = \left| \frac{2 \times 2 + 1 \times 2}{\sqrt{5} \times 3} \right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$(3) \text{ 设 } E(x, y, z), \frac{ME}{MN} = \lambda,$$

$$\therefore \overrightarrow{ME} = \lambda \overrightarrow{MN},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{ME} = (x, y, z - 2), \overrightarrow{MN} = (2, 2, -1),$$

$$\therefore E \text{ 点的坐标为 } (2\lambda, 2\lambda, 2 - \lambda), \because AD \perp \text{面 } MDC, \therefore AD \perp MC,$$

欲使平面 $ADE \perp$ 平面 MNC , 只要 $AE \perp MC$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = (2\lambda - 2, 2\lambda, 2 - \lambda), \overrightarrow{MC} = (0, 2, -2),$$

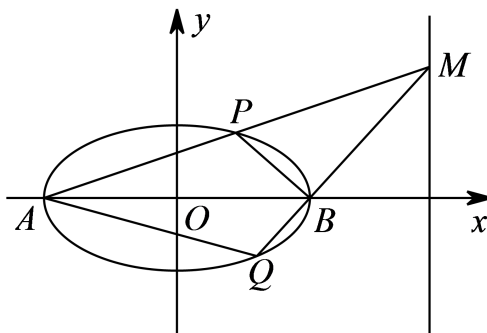
$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{MC} = 0, \therefore 4\lambda - 2(2 - \lambda) = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{2}{3}, \therefore \frac{ME}{MN} = \frac{2}{3}.$$

- 18 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 以椭圆长、短轴四个端点为顶点的四边形的面积为 $4\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 如图所示, 记椭圆的左、右顶点分别为 A, B , 当动点 M 在定直线 $x = 4$ 上运动时, 直线 AM, BM 分别交椭圆于两点 P, Q , 求四边形 $APBQ$ 面积的最大值.



答案

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) 6.$$

解析

(1) 有题设知,

$$a = 2c,$$

$$2ab = 4\sqrt{3},$$

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1,$$

$$\therefore C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由对称性, 可令 $M(4, t)$, 其中 $t > 0$,

$$AM: y = \frac{t}{6}(x + 2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{t}{6}(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } (27 + t^2)x^2 + 4t^2x + 4t^2 - 108 = 0,$$

$$x_A x_P = \frac{4t^2 - 108}{27 + t^2},$$

$$\therefore x_A = -2,$$

$$\therefore x_P = \frac{54 - 2t^2}{27 + t^2},$$

$$\therefore y_P = \frac{18t}{27 + t^2},$$

$$BM: y = \frac{t}{2}(x - 2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{t}{2}(x - 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } (3 + t^2)x^2 - 4t^2x + 4t^2 - 12 = 0,$$

$$\therefore x_B x_Q = \frac{4t^2 - 12}{3 + t^2},$$

$$\text{由 } x_B = 2,$$

$$\therefore x_Q = \frac{2t^2 - 6}{3 + t^2},$$

$$\therefore y_Q = \frac{-6t}{3 + t^2},$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形}APBQ} = \frac{1}{2}|AB||y_P - y_Q|$$

$$= 2|y_P - y_Q|$$

$$= 2 \left(\frac{18t}{27 + t^2} + \frac{6t}{3 + t^2} \right)$$

$$= \frac{48t(9 + t^2)}{(27 + t^2)(3 + t^2)}$$

$$= \frac{48t(9 + t^2)}{(9 + t^2)^2 + 12t^2}$$

$$= \frac{48}{\frac{9 + t^2}{t} + \frac{12t}{9 + t^2}}$$

$$\text{由于 } \lambda = \frac{9 + t^2}{t} \geq 6,$$

且 $\lambda + \frac{12}{\lambda}$ 在 $[6, +\infty)$ 单调递增,

故 $\lambda + \frac{12}{\lambda} \geq 8$,

从而, $S_{\text{平行四边形}APBQ} = \frac{48}{\lambda + \frac{6}{\lambda}} \leq 6$,

当且仅当 $\lambda = 6$, 即 $t = 3$ 时,

四边形 $APBQ$ 的面积取最大值 6.

19 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$, 首项 $a_1 = 1$, 且 $2a_1, a_2 + 1, a_3 + 3$ 成等比数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 P_n .
- (3) 比较 P_n 与 $\frac{2^n}{n^2}$ 的大小.

答案

(1) $a_n = 2n - 1$.

(2) $P_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.

(3) $P_n < \frac{2^n}{n^2}$.

解析

(1) $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$,

首项 $a_1 = 1$, $2a_1, a_2 + 1, a_3 + 3$ 成等比数列,

$\therefore$ 由已知 $(a_2 + 1)^2 = 2a_1(a_3 + 3)$,

$\therefore (1 + d + 1)^2 = 2(1 + 2d + 3)$,

则 $d^2 = 2d$,

又 $\because d > 0$,

$\therefore d = 2$,

$\therefore a_n = 2n - 1$.

(2) $\therefore \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$,

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和:

$$P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$(3) \text{ 设 } f(n) = \frac{2^n}{n^2}, \text{ 则 } f(n+1) - f(n) = \frac{2^n [n(n-2) - 1]}{[n(n+1)]^2},$$

当 $n \geq 3$ 时, $f(n+1) - f(n) > 0$,

$\therefore$ 当 $n \geq 3$ 时, $f(n)$ 单调递增,

$$\therefore f(n) \geq f(3) = \frac{8}{9}, \text{ 而 } P_n < \frac{1}{2},$$

$\therefore n \geq 3$ 时, $f(n) > P_n$,

经检验, $n = 1, 2$ 时, 仍有 $f(n) > P_n$.

综上, $P_n < \frac{2^n}{n^2}$.

20 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \lambda S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*, \lambda > 0)$, 且 $a_1, a_2 + 2, a_3 + 3$ 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_{n+1} = 2b_n + a_{n+1}$, $b_1 = 2$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 设 $c_n = \frac{a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$, R_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均有 $R_n < \lambda$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}$.

(2) $T_n = n \cdot 2^n$.

(3) 1.

解析

(1) $a_{n+1} = \lambda S_n + 1$ ①,

$$a_n = \lambda S_{n-1} + 1$$
 ②,

$$\text{故 } a_{n+1} = (1 + \lambda)a_n,$$

故 $\{a_n\}$ 为以 a_1 为首项 $(1 + \lambda)$ 为公比的等比数列,

$$a_n = a_1(1 + \lambda)^{n-1} = (1 + \lambda)^{n-1},$$

$$\text{又 } 2(a_2 + 2) = a_1 + a_3 + 3$$

$$2(1 + \lambda + 2) = 1 + (1 + \lambda)^2 + 3,$$

$$\therefore \lambda = 1 \text{ 或 } (-1) \text{ (舍)},$$

$$\text{故 } a_n = (1 + \lambda)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

(2) $b_{n+1} = 2b_n + a_{n+1} = 2b_n + 2^n$

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{b_n}{2^n} + \frac{1}{2},$$

故 $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$ 为以1为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列,

$$\frac{b_n}{2^n} = \frac{n+1}{2},$$

$$b_n = (n+1) \cdot 2^{n-1},$$

$$\therefore T_n = 2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \cdots + (n+1) \cdot 2^{n-1},$$

$$2T_n = 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} + (n+1) \cdot 2^n,$$

$$T_n = (n+1) \cdot 2^n - (2 \cdot 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})$$

$$= (n+1) \cdot 2^n - \left(2 + \frac{2-2^n}{1-2}\right)$$

$$= n \cdot 2^n.$$

$$(3) \quad C_n = \frac{2^n}{(1+2^{n-1})(1+2^n)}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{1+2^{n-1}} - \frac{1}{2^n+1} \right),$$

$$R_n = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$

$$= 2 \left[\frac{1}{1+2^0} - \frac{1}{1+2^1} + \frac{1}{1+2^1} - \frac{1}{1+2^2} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+2^{n-1}} - \frac{1}{1+2^n} \right]$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+2^n} \right),$$

$$R_n = 1 - \frac{2}{1+2^n} < \lambda \text{ 恒成立,}$$

R_n 无限趋于1,

故 $\lambda \geq 1$, λ 最小值为1.