

2020年高三期末复习卷 (A)

选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{1, 4, 7, 8\}$, 则 $A \cap (\complement_U B)$ ().

- A. $\{4\}$ B. $\{2, 3, 6\}$ C. $\{2, 3, 7\}$ D. $\{2, 3, 4, 7\}$

2 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程是 ().

- A. $x = 1$ B. $y = 1$ C. $x = -1$ D. $y = -1$

3 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 - 2x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 2$ ”的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 充要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分又不必要条件

4 直线 $x - y + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 则弦 AB 的长度为 ().

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

5 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 ().

- A. $S_n = 2a_n - 1$ B. $S_n = 1 - 2a_n$ C. $S_n = a_n - 2$ D. $S_n = 2 - a_n$

6 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 若 $a = \ln 3$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$, 则 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 的大小关系为 ().

- A. $f(a) > f(b) > f(c)$ B. $f(b) > f(c) > f(a)$ C. $f(c) > f(b) > f(a)$ D. $f(a) > f(c) > f(b)$

7

将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是 () .

A. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

B. $g(x)$ 的最小正周期是 4π

C. $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

D. $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减

8 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 $F(\sqrt{6}, 0)$ ，点 P 在 C 的一条渐近线上，若 $|PO| = |PF|$ (O 是原点)，且 $\triangle POF$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ，则 C 的方程是 () .

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$

B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$

D. $\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$

9 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln(x-2)|, & 2 < x \leq 3 \\ -x^2 + 15x - 36, & x > 3 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = kx$ 恰有三个互不相同的实数解，则实数 k 的取值范围是 () .

A. $[3, 12]$

B. $(3, 12)$

C. $(0, 12)$

D. $(0, 3)$

填空题

(本大题共6小题，每小题5分，共30分)

10 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $(1 + 3i)z = 4i$ ，则 $z =$ _____ .

11 $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中含 x^3 项的系数是 _____ (用数字作答) .

12 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + 3b = 1$ ，则 $\frac{4}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值是 _____ .

13 已知半径为2的球的球面上有 A, B, C, D 不同的四点， $\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形，且 $DO \perp$ 平面 ABC (O 为球心， D 与 O 在平面 ABC 的同一侧)，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 _____ .

14 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_5 = 9, a_2 + a_7 = 16$ ，则 $a_n =$ _____；若 $b_n = \frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}} + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____ .

- 15 设点 M, N, P, Q 为圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r \in \mathbf{R}$) 上四个互不相同的点, 若 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$, 且 $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \cdot \overrightarrow{PQ} = 2$, 则 $|\overrightarrow{PQ}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答题

(本大题共5小题, 共75分)

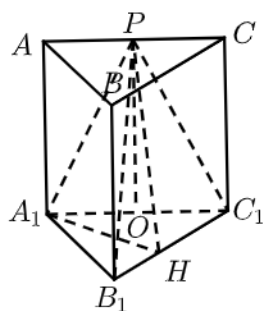
- 16 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $2(\sin A \cos C + \cos A \sin C) = \sin A + \sin C$.

- (1) 求证: a, b, c 成等差数列.
- (2) 若 $c = 7, C = \frac{2\pi}{3}$, 求 b 和 $\sin 2B$ 的值.

- 17 每年的12月4日为我国“法制宣传日”. 天津市某高中团委在2019年12月4日开展了以“学法、遵法、守法”为主题的学习活动. 已知该学校高一、高二、高三的学生人数分别是480人、360人、360人. 为检查该学校组织学生学习的效果, 现采用分层抽样的方法从该校全体学生中选取10名学生进行问卷测试. 具体要求: 每位被选中的学生要从10个有关法律、法规的问题中随机抽出4个问题进行作答, 所抽取的4个问题全部答对的学生将在全校给予表彰.

- (1) 求各个年级应选取的学生人数.
- (2) 若从被选取的10名学生中任选3人, 求这3名学生分别来自三个年级的概率.
- (3) 若被选取的10人中的某学生能答对10道题中的7道题, 另外3道题回答不对, 记 X 表示该名同学答对问题的个数, 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

- 18 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, P, O 分别为 AC, A_1C_1 的中点, $PA_1 = PC_1 = 2\sqrt{2}$, $A_1B_1 = B_1C_1 = PB_1 = 2\sqrt{3}, A_1C_1 = 4$.



- (1) 求证： $PO \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.
- (2) 求二面角 $B_1 - PA_1 - C_1$ 的正弦值 .
- (3) 已知 H 为棱 B_1C_1 上的点，若 $\overrightarrow{B_1H} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}$ ，求线段 PH 的长度 .

19 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ ，点 P 在椭圆上， O 为原点 .

- (1) 若 $|PO| = c$ ， $\angle F_2OP = \frac{\pi}{3}$ ，求椭圆的离心率 .
- (2) 若椭圆的右顶点为 A ，短轴长为 2，且满足 $\frac{1}{|OF_2|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{e}{3|F_2A|}$ (e 为椭圆的离心率) .
 - ① 求椭圆的方程 .
 - ② 设直线 $l: y = kx - 2$ 与椭圆相交于 P, Q 两点，若 $\triangle POQ$ 的面积为 1，求实数 k 的值 .

20 已知函数 $f(x) = \ln(ex) + \frac{1}{2}ax^2 + (a+1)x$ (e 为自然对数的底数) .

- (1) 当 $a = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .
- (3) 当 $a < 0$ 时，证明 $f(x) \leq -\frac{3}{2a} - 1$.