

2020高一河西期末模拟

一、选择

1 -225° 是第 () 象限角 .

A. 一

B. 二

C. 三

D. 四

答案 B

解析 由于角 -225° 的终边落在第二象限, 故 -225° 是第二象限角 .

2 $\left(5\frac{1}{16}\right)^{0.5} + (-1)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = ()$.

A. $-\frac{9}{4}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{9}{4}$

D. $-\frac{4}{9}$

答案 C

解析 $\begin{aligned} & \left(5\frac{1}{16}\right)^{0.5} + (-1)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \times \frac{9}{16} + \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{9}{16} + \left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{9}{16} + \frac{9}{16} \\ &= \frac{9}{4} , \\ & \text{故C} . \end{aligned}$

3 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{1}{2} < 2^x \leq 2\right\}$, $B = \left\{x \mid \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0\right\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = ()$.

A. $\emptyset$

B. $\left(-1, \frac{1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

D. $(-1, 1]$

答案 B

解析 $\because A = \left\{ x \mid \frac{1}{2} < 2^x \leq 2 \right\} = \{ x \mid -1 < x \leq 1 \}$, $B = \left\{ x \mid \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \right\} = \left\{ x \mid \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2} \right\}$,
 $\therefore \complement_{\mathbb{R}} B = \left\{ x \mid x > \frac{3}{2} \text{ 或 } x \leq \frac{1}{2} \right\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \left(-1, \frac{1}{2} \right]$.

故选：B.

4 已知一个扇形所在圆的半径为1，圆心角为 60° ，则（ ）.

A. 该扇形圆心角弧度数为1

B. 该扇形弧长为 $\frac{\pi}{3}$

C. 该扇形面积为 $\frac{2\pi}{3}$

D. 该扇形周长为 $\frac{2\pi}{3}$

答案 B

解析 A选项： $\because 60^\circ = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore$ 扇形圆心角弧度数是 $\frac{\pi}{3}$ ，故A错误；

B选项：扇形圆心角弧度数 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，圆的半径 $r = 1$ ，

$\therefore$ 扇形弧长是 $\alpha r = \frac{\pi}{3}$ ，故B正确；

C选项： $\because$ 扇形圆心角弧度数 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，圆的半径 $r = 1$ ，

$\therefore$ 扇形面积是 $\frac{1}{2} \alpha r^2 = \frac{\pi}{6}$ ，故C错误；

D选项： $\because$ 扇形圆心角弧度数 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，圆的半径 $r = 1$ ，

$\therefore$ 扇形周长是 $2r + \alpha r = 2 + \frac{\pi}{3}$ ，故D错误.

故选B.

5 已知 $a = \log_5 6$ ， $b = \log_{0.5} 2$ ， $c = 0.5^{0.2}$ ，则 a ， b ， c 的大小关系为（ ）.

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

答案 C

解析 因为 $a = \log_5 6 > \log_5 5 = 1$ ， $b = \log_{0.5} 2 < \log_{0.5} 1 = 0$ ， $c = 0.5^{0.2} \in (0, 1)$ ，

所以 $a > c > b$.

故选：C .

6 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x}$ 的零点所在区间是 () .

- A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(1, e-1)$ C. $(e-1, 2)$ D. $(2, e)$

答案 C

解析 $\because f(e-1) = \ln e - \frac{2}{e-1} = 1 - \frac{2}{e-1} = \frac{e-3}{e-1} < 0$,

$$f(2) = \ln 3 - 1 > \ln e - 1 = 0 ,$$

$$\therefore f(e-1) \cdot f(2) < 0 ,$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x}$ 的零点所在区间是 $(e-1, 2)$.

7 设 $\sin(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin 2\theta = ()$.

- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

答案 A

解析 由 $\sin(\frac{\pi}{4} + \theta) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{1}{3}$,

$$\text{两边平方得: } 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{9} , \text{ 即 } 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{7}{9} ,$$

$$\text{则 } \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{7}{9} .$$

故选A .

8 中心城区现有绿化面积 1000hm^2 , 计划每年增长4% , 经过 $x (x \in \mathbf{N}_+)$ 年 , 绿化面积为 $y\text{hm}^2$, 则 x , y 间的函数关系为 () .

- A. $y = 1000(1 + 4\%)^x (x \in \mathbf{N}_+)$ B. $y = (1000 \times 4\%)^x (x \in \mathbf{N}_+)$
C. $y = 1000(1 - 4\%)^x (x \in \mathbf{N}_+)$ D. $y = 1000(4\%)^x (x \in \mathbf{N}_+)$

答案 A

解析

由题知，每经过一年，绿化面积变为上一年的 $(1 + 4\%)$ ，所以 x 与 y 的函数关系为

$$y = 1000(1 + 4\%)^x \quad (x \in \mathbf{N}_+);$$

故选A.

9

已知函数 $f(x) = 4 \sin \omega x \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \sin^2 \omega x$ ($\omega > 0$) 区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$ 上是增函数，且在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值，则 ω 的取值范围是().

- A. $(0, 1]$ B. $\left(0, \frac{3}{4} \right]$ C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4} \right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$

答案

D

解析

$$\begin{aligned} \because f(x) &= 4 \sin \omega x \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \sin^2 \omega x \\ &= 4 \sin \omega x + \frac{1 - \cos(\omega x + \frac{\pi}{2})}{2} - 2 \sin^2 \omega x \\ &= 2 \sin \omega x (1 + \sin \omega x) - 2 \sin^2 \omega x \\ &= 2 \sin \omega x, \end{aligned}$$

$$\text{即: } f(x) = 2 \sin \omega x,$$

$\left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega} \right]$ ，是函数含原点的递增区间.

又 $\because$ 函数在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$ 递增，

$$\left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega} \right] \supseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$\therefore \text{得不等式组: } -\frac{\pi}{2\omega} \leq -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\text{又} \because \omega > 0,$$

$$\therefore 0 < \omega \leq \frac{3}{4}$$

又函数在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值，

根据正弦函数的性质可知 $\omega x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

即函数在 $x = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}$ 处取得最大值，可得 $0 \leq \frac{\pi}{2\omega} \leq \pi$.

$$\therefore \omega \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{综合可得 } \omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right],$$

综上所述，答案选择：D.

二、填空

10 已知 $\cos \frac{4\pi}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $-\frac{1}{2}$

解析 $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= -\cos \frac{\pi}{3}$
 $= -\frac{1}{2}$.
 故本题答案为 $-\frac{1}{2}$.

11 $\log_6 2 + 2\log_6 \sqrt{3} + 10^{\lg 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 3

解析 $\log_6 2 + 2\log_6 \sqrt{3} + 10^{\lg 2} = \log_6 (2 \times (\sqrt{3})^2) + 2 = 1 + 2 = 3$.
 故答案为 : 3 .

12 将函数 $y = f(x)$ 的图象上各点的横坐标不变, 纵坐标变为原来的2倍, 再把所得图象上各点的纵坐标不变, 横坐标变为原来的3倍, 再把所得图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 得到 $y = \sin x$ 的图象, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

解析 解法一: $y = f(x)$ 的图象上各点的横坐标不变, 纵坐标变为原来的2倍, 得 $y = 2f(x)$ 的图象;
 再把所得图象上各点的纵坐标不变, 横坐标变为原来的3倍, 得 $y = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$ 的图象;
 再把所得图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位,
 得 $y = 2f\left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{3}\right)$ 的图象 .

$$\therefore 2f = \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{3} \right) = \sin x ,$$

$$\text{即 } f\left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{3} \right) = \frac{1}{2} \sin x ,$$

$$\text{令 } \frac{1}{3} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = t$$

$$\text{则 } x = 3t - \frac{\pi}{4} ,$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2} \sin \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) ,$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) .$$

解法二：\$y = \sin x\$ 的图象向右平移 \$\frac{\pi}{4}\$ 个单位，

得 \$y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)\$ 的图象；

再把所得图象上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的 \$\frac{1}{3}\$，

得 \$y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)\$ 的图象；

再把所得图象上各点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 \$\frac{1}{2}\$，

得 \$y = \frac{1}{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)\$ 的图象，

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

故答案为：\$\frac{1}{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)\$.

13 设函数 \$f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 2\$，则 \$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}\$；函数 \$f(x)\$ 在区间 \$[-1, 2]\$ 的最大值为 \$\underline{\hspace{2cm}}\$.

答案

1:2

2:10

解析

由 \$f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 2\$ 得，

当 \$x = 1\$ 时，\$f(1) = 4 - 2^2 + 2 = 2\$，

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 2 = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 2 ,$$

令 \$t = 2^x\$，\$x \in [-1, 2]\$，得 \$t \in \left[\frac{1}{2}, 4 \right]\$，

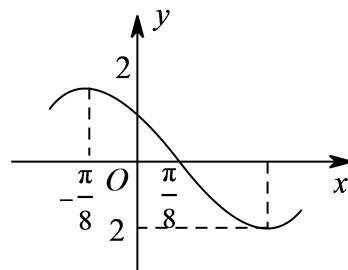
$$\therefore f(t) = t^2 - 2t + 2 = (t - 1)^2 + 1 ,$$

当 \$t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)\$ 时，\$f(t)\$ 是减函数，此时 \$f(t)_{\max} = f\left(\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}\$，

当 \$t \in [1, 4]\$ 时，\$f(t)\$ 是增函数，此时 \$f(t)_{\max} = f(4) = 10\$，

\$\therefore f(x)\$ 在 \$[-1, 2]\$ 上的最大值为 10 .

- 14 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的一段图象如下图所示, 则函数的解析式为 _____ .



答案 $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{3\pi}{4})$

解析 由题意可知:

$$A = 2, T = 2 \times (\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}) = \pi,$$

$$\therefore \omega = 2.$$

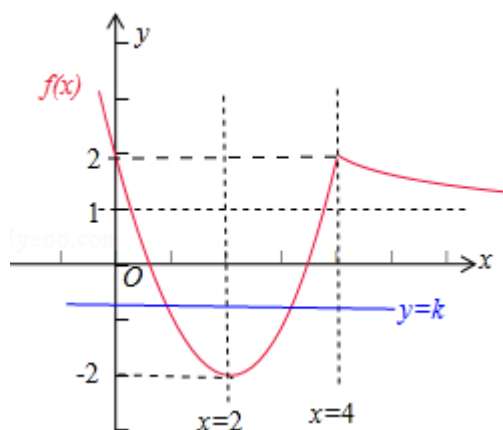
函数 $f(x)$ 的解析式为:

$$f(x) = 2 \sin(2x + \frac{3\pi}{4}).$$

- 15 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2, & x < 4 \\ 1 + \frac{4}{x}, & x \geq 4 \end{cases}$, 记 $g(x) = f(x) - k$, 若函数 $g(x)$ 有两个零点, 则实数 k 的取值范围是 _____ .

答案 $\{k | k = 2 \text{ 或 } -2 < k \leq 1\}$

解析 对于函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2, & x < 4 \\ 1 + \frac{4}{x}, & x \geq 4 \end{cases}$,



当 $x = 2$ 时，函数有最小值为 -2 ，但没有最大值。

由题意可得函数 $y = f(x)$ 的图象和直线 $y = k$ 有 2 个交点，

如图所示：

数形结合求得 k 的范围为 $\{k | k = 2 \text{ 或 } -2 < k \leq 1\}$ 。

三、解答

16 已知 $\tan \alpha = 2$ 。

- (1) 求 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值；
- (2) 求 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha - 1}$ 的值。

答案 (1) -3 。

(2) 1 。

解析 (1) $\because \tan \alpha = 2$,

$$\begin{aligned} \therefore \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{2 + 1}{1 - 2} = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha - 1} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - (2 \cos^2 \alpha - 1) - 1} \\ &= \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + \tan \alpha - 2} = \frac{2 \times 2}{2^2 + 2 - 2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

17 设函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，已知当 $x > 0$ 时， $f(x) = -(x+1)^2$ 。

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式。
- (2) 若 $f(m^2 + 2m) + f(m) > 0$ ，求 m 的取值范围。

答案

- (1)
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(x+1)^2, & x > 0 \end{cases}.$$
- (2) $(-3, 0)$ 。

解析

- (1) $\because$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

$$\therefore f(0) = 0,$$

若 $x < 0$ ，则 $-x > 0$ ，

$$\therefore \text{当 } x > 0 \text{ 时，} f(x) = -(x+1)^2.$$

$$\therefore \text{当 } -x > 0 \text{ 时，} f(-x) = -(-x+1)^2 = -(x-1)^2.$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数，

$$\therefore f(-x) = -(x-1)^2 = -f(x),$$

$$\text{则 } f(x) = (x-1)^2, x < 0,$$

则函数 $f(x)$ 的解析式

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(x+1)^2, & x > 0 \end{cases}.$$

- (2) 若 $f(m^2 + 2m) + f(m) > 0$ ，

$$\text{则 } f(m^2 + 2m) > -f(m) = f(-m),$$

当 $x > 0$ 时， $f(x) = -(x+1)^2$ 为减函数，且 $f(x) < -1 < f(0)$ ，

当 $x < 0$ 时， $f(x) = (x-1)^2$ 为减函数，且 $f(x) > 1 > f(0)$ ，

则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

$$\text{则 } m^2 + 2m < -m,$$

$$\text{即 } m^2 + 3m < 0,$$

$$\text{则 } -3 < m < 0,$$

即 m 的取值范围是 $(-3, 0)$ 。

18 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期 .
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的最小值 .

答案

(1) 2π .

(2) $-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos x) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{周期 } T &= \frac{2\pi}{1} = 2\pi .
 \end{aligned}$$

(2) $\because -\pi \leq x \leq 0$

$$\therefore -\frac{3\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq 0$$

$$\therefore \text{最小值为 } -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} .$$