

解答题训练4 (导数)

一、导数训练

1 已知 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{x} - (a+1)x + 2$,

(1) 若 $a = 1$, 求点 $(1, -1)$ 处的切线方程.

(2) 讨论该函数的单调性.

2 已知 $f(x) = x^2 - 4x - 6 \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程以及 $f(x)$ 的单调性.

(2) 对 $\forall x \in (1, +\infty)$, 有 $xf'(x) - f(x) > x^2 + 6k\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 12$ 恒成立, 求 k 的最大整数解.

(3) 令 $g(x) = f(x) + 4x - (a-6) \ln x$, 若 $g(x)$ 有两个零点分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 且 x_0 为 $g(x)$ 的唯一的极值点, 求证: $x_1 + 3x_2 > 4x_0$.

3 已知函数 $f(x) = \ln x - x$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 函数 $g(x) = f(x) + x + \frac{1}{2x} - m$ 有两个零点 x_1, x_2 , ($x_1 < x_2$) , 求证 : $x_1 + x_2 > 1$.

4 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x+1}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点 , 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数 , 求 a 的取值范围 .

(3) 设 m, n 为正实数 , 且 $m > n$, 求证 : $\frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2}$.

5 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{2a}{x+a}$ ($a > 0$) .

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性 .

(2) 设函数 $f(x)$ 存在两个极值点 , 并记作 x_1 , x_2 , 若 $f(x_1) + f(x_2) > 4$, 求正数 a 的取值范围 .

(3) 求证 : 当 $a = 1$ 时 , $f(x) > \frac{1}{e^{x+1}} + \frac{1}{x+1}$ (其中 e 为自然对数的底数) .

6 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + cx + d (c, d \in \mathbf{R})$ ，函数 $f(x)$ 的图象记为曲线 C 。

- (1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，求 c 的取值范围。
- (2) 若函数 $y = f(x) - m$ 有两个零点 $\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ ，且 $x = \alpha$ 为 $f(x)$ 的极值点，求 $2\alpha + \beta$ 的值。
- (3) 设曲线 C 在动点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线 l_1 与 C 交于另一点 B ，在点 B 处的切线为 l_2 ，两切线的斜率分别为 k_1, k_2 ，是否存在实数 c ，使得 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值？若存在，求出 c 的值；若不存在，说明理由。

二、限时训练

7 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f(x) > 0$ 且 $f(e) = 1$, 若 $xf'(x) \ln x + f(x) > 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 成立, 则不等式 $\frac{1}{f(x)} > \ln x$ 的解集为 () .

- A. $\{x | 0 < x < 1\}$
- B. $\{x | x > 1\}$
- C. $\{x | x > e\}$
- D. $\{x | 0 < x < 2e\}$

8 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0)$ 上的可导函数, 其导函数为 $f'(x)$, 且有 $2f(x) + xf'(x) > x^2$, 则不等式 $(x + 2019)^2 f(x + 2019) - 4f(-2) < 0$ 的解集为 () .

- A. $(-2019, -2017)$
- B. $(-2019, -2018)$
- C. $(-2021, -2019)$
- D. $(-2020, -2019)$

9 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x - 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \ln x + 1, & 0 < x < 3 \end{cases}$ 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x+2) = f(x-2)$, 若在区间 $[0, 4]$ 上函数 $g(x) = f(x) - mx$ 恰有三个不同的零点, 则实数 m 的取值范围为 _____ .

10 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x > 0 \\ 1 - |2x + 1|, & x \leq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx - 1$ 有两个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围为 _____ .