解答题训练3（数列放缩）

一、裂项放缩

考点1：$a_n=\dfrac{1}{n^2}$型

1 求证：$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2(n\in\mathrm{N}^*)$．

答案 证明见解析．

解析 $\because\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}(n\geqslant 2)$，

$\therefore$左边$<+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$=1+1-\dfrac{1}{n}<2(n\geqslant 2)$．

当$n=1$时，不等式显然成立．

2 求证：$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{7}{4}(n\in\mathbf{N}^*)$

答案 证明见解析．

解析 法一：从第3缩开始放缩，

$\because\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}(n\geqslant 2)$，

$\therefore$左边$<1+\dfrac{1}{2^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)}$

$=1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{7}{4}(n\geqslant 3)$

当$n=1$，2时，不等式显然成立．

法二：将通项放得比$\dfrac{1}{n(n-1)}$更小一些；

$\because\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)(n\geqslant 2)$，

$\therefore$左边

$<1+\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n=1}\right)\right]$

$$=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}(n\geqslant 2)$$

当$n=1$时，不等式显然成立．

3 求证：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 证明见解析．

解析 方法一：上一题法二基础上，从第3缩开始放缩，

$\because \frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)(n\geqslant 2)$，

$\therefore$左边

$$<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{5}{3}(n\geqslant 3)$$．

当$n=1$，2时，不等式显然成立．

方法二：将通项放得比$\frac{1}{n^2-1}$更小一些，

$\because \frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)(n\geqslant 2)$，

$\therefore$左边

$$<1+2\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=1+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)<1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}(n\geqslant 2)$$．

当$n=1$时，不等式显然成立．

4 求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4}$．

答案 证明见解析．

解析 因为$\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$

$$<\frac{1}{4}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{k(k+1)}$$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$，

所以$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)}<\frac{1}{4}$，

故不等式得证．

5 已知$a_n=\frac{n}{2}$，$b_n=n^2$，设$c_n=\frac{1}{a_n+b_n}$，求证：$c_1+c_2+\cdots+c_n<\frac{4}{3}$．

答案 证明见解析．

解析 $c_n=\frac{2}{2n^2+n}=\frac{2}{n\left(2n+1\right)}=\frac{4}{2n\left(2n+1\right)}<\frac{4}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$c_1+c_2+\cdots+c_n<\frac{2}{3}+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+1}$

$<\frac{4}{3}$

．

故不等式得证．

6 求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}<\frac{29}{24}$．

答案 证明见解析．

解析 因为$\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k^3-k}=\frac{1}{k(k-1)(k+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}\right]\left(k\geqslant 2\right)$，

所以

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}<1+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right]=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2n(n+1)}$

$<\frac{29}{24}$

．故不等式得证．

7 求证：$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k\sqrt{k}}<\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}$．

答案 证明见解析.

解析 一方面，$\frac{1}{2k\sqrt{k}}=\frac{1}{2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}<\frac{1}{2\sqrt{k}(\sqrt{k}\cdot\sqrt{k-1})}$

$=\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}$

$=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{2\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)<\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}(k\geqslant 2)$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k\sqrt{k}}<\frac{1}{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}$，

另一方面，$\frac{1}{2k\sqrt{k}}=\frac{1}{2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}>\frac{1}{2\sqrt{k}(\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1})}$

$=\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$

$=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)>\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k\sqrt{k}}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

综上，$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k\sqrt{k}}<\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}$，故不等式得证.

8 求证：$\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1}<\frac{7}{10}$.

答案 证明见解析.

解析 $\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$.

因为$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{4n^2-2n}$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2-\frac{1}{2}n}\right]$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}}\right]$

$$< \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(n-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(n-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{n+\frac{1}{4}}\right],$$

所以$\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{3-\frac{3}{4}}-\frac{1}{3+\frac{1}{4}}+\cdots+\frac{1}{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{n+\frac{1}{4}}\right]$

$<\frac{7}{10}$．

故不等式得证．

9 求证：对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{1}{2}\leqslant 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$．

答案 证明见解析．

解析 对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，

且$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}$是显然的，故只需证右半边不等式．

由柯西不等式可得

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\leqslant\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)\cdot n,$$

$$<\left(\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}\right)\cdot n,$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\cdot n,$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)\cdot n,$$

$$=\frac{1}{2},$$

故$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

综上所述，$\frac{1}{2}\leqslant 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$．

考点2：迭代型

10 若数列$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+1}<\frac{1}{2}$．

答案 证明见解析．

解析 由$a_{n+1}-a_n=a_n^2>0$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$变形可得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{1}{2}$．

故不等式得证．

11 设数列$\{b_n\}$满足$b_1=\frac{1}{2}$，$b_{n+1}=\frac{b_n^2}{(n+1)^2}+b_n$，证明：$b_n<1$．

答案 证明见解析．

解析 由$b_{n+1}-b_n=\frac{b_n^2}{(n+1)^2}>0\Rightarrow b_{n+1}>b_n$，

可知数列$\{b_n\}$单调递增，

所以$b_{n+1}-b_n<\frac{b_nb_{n+1}}{(n+1)^2}$，即$\frac{b_{n+1}-b_n}{b_nb_{n+1}}<\frac{1}{(n+1)^2}$，

由此可得$\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}>-\frac{1}{(n+1)^2}$，累加可得$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_1}>-\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\cdots+\frac{1}{2^2}\right)$，

又因为$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，

所以

$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_1}>-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\frac{1}{b_n}>1+\frac{1}{n}$，

即$\frac{1}{b_n}>1\Rightarrow b_n<1$．

故不等式得证．

12 已知数列$\{a_n\}$，$a_n\geqslant 0$，$a_1=0$，$a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2\,(n\in\mathrm{N}^*)$．记$\mathrm{S}_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

$T_n=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$．

求证：当$n\in\mathrm{N}^*$时，

（1）$a_n<a_{n+1}$；

（2）$\mathrm{S}_n>n-2$；

（3）$T_n<3$．

答案 （1）答案见解析．

（2）答案见解析

（3）答案见解析

解析 （1）方法一：用数学归纳法证明．①当$n=1$时，因为a_2是方程$x^2+x-1=0$的正根，所以$a_1<a_2$．②假设当$n=k\,(k\in \mathrm{N}^*)$时，$a_k<a_{k+1}$，因为

$a_{k+1}^2-a_k^2=\left(a_{k+2}^2+a_{k+2}-1\right)-\left(a_{k+1}^2+a_{k+1}-1\right)=\left(a_{k+2}-a_{k+1}\right)\left(a_{k+2}+a_{k+1}+1\right)>0$

，所以$a_{k+1}<a_{k+2}$．即当$n=k+1$时，$a_n<a_{n+1}$也成立．根据①和②，可知$a_n<a_{n+1}$对任何$n\in \mathrm{N}^*$都成立．

方法二：由变形$a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2$，可得

$\left(a_{n+1}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}=a_n^2\Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+\dfrac{5}{4}}-\dfrac{1}{2}$．

令$f(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{5}{4}}-\dfrac{1}{2}\Rightarrow f'(x)>0$，又因为$a_2>a_1$，所以$a_n<a_{n+1}$．

（2）由$a_{k+1}^2+a_{k+1}-1=a_k^2$，$k=1$，$2$，$\cdots$，$n-1\,(n\geqslant 2)$得，

$a_k^2+(a_2+a_3+\cdots+a_n)-(n-1)=a_1^2$，因为$a_1=0$，所以$S_n=n-1-a_n^2$． 由$a_n<a_{n+1}$及$a_{n+1}=1+a_n^2-a_{n+1}^2<1$得$a_n<1$．所以$\mathrm{S}_n>n-2$．

（3）方法一：由$a_{k+1}^2+a_{k+1}=1+a_k^2\geqslant 2a_k$，得$\dfrac{1}{1+a_{k+1}}\leqslant\dfrac{a_{k+1}}{2a_k}(k=2,3,\cdots,n-1,n\geqslant 3)$

，

所以$\dfrac{1}{(1+a_3)(1+a_4)\cdots(1+a_n)}\leqslant\dfrac{a_n}{2^{n-2}a_2}(n\geqslant 3)$，

于是$\dfrac{1}{(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)}\leqslant\dfrac{a_n}{2^{n-2}\left(a_2^2+a_2\right)}=\dfrac{a_n}{2^{n-2}}<\dfrac{1}{2^{n-2}}<(n\geqslant 3)$时，

$T_n<1+1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-2}}<3$，又因为$T_1<T_2<T_3<3$,所以$T_n<3$．

方法二：$\because a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2\cdot a_{n+1}=\dfrac{-1+\sqrt{5+4a_n^2}}{2}>\dfrac{1}{2}$，所以$n\geqslant 2$时，$a_n>\dfrac{1}{2}$，$1+a_n>\dfrac{3}{2}$．

$$T_n=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}<1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=3-\frac{2^n}{3^{n-1}}<3$$

，所以不等式得证．

方法三：$T_n=\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$，因为$a_n<a_{n+1}$，

$\therefore T_n<1+\frac{1}{(1+a_2)}+\frac{1}{(1+a_2)^2}+\frac{1}{(1+a_2)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+a_2)^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{1+a_2}\right)^n}{1-\frac{1}{1+a_2}}$

$=\frac{1+a_2-\frac{1}{(1+a_2)^{n-1}}}{a_2}<\frac{1+a_2}{a_2}$

，$\because a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2\cdot a_1=0$，所以$a_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\therefore T_n<\frac{1+a_2}{a_2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3$，

不等式得证．

方法四：$\because a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2$，则$a_{n+1}\left(1+a_{n+1}\right)=a_n^2+1$，

令$C_n=\frac{1}{\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\cdots\left(1+a_n\right)}=\frac{1}{\left(1+a_2\right)\cdots\left(1+a_n\right)}$

$=\frac{a_2\cdot a_3\cdots a_n}{\left(1+a_2^2\right)\left(1+a_3^2\right)\cdots\left(1+a_{n-1}^2\right)}$

$=\frac{a_n}{\left(\frac{1}{a_2}+a_2\right)\left(\frac{1}{a_3}+a_3\right)\cdots\left(\frac{1}{a_{n-1}}+a_{n-1}\right)}\leqslant\frac{a_n}{2^{n-2}}<\frac{1}{2^{n-2}}$

$(n\geqslant 3)$．故当$n\geqslant 3$时，$T_n<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}<3$，又因为

$T_1<T_2<T_3<3$,所以$T_n<3$．

13 已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），证明：$a_n<\frac{1}{n}$．

答案 证明见解析．

解析 因为$a_n-a_{n+1}\geqslant a_n^2>0\Rightarrow a_n>a_{n+1}$，

又因为$a_{n+1}\leqslant a_n(1-a_n)$，由于$\{a_n\}$为正项数列，

所以$0<a_n<1$，

因而$a_na_{n+1}<a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}>1$，

于是$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}+\cdots+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}>n-1+\frac{1}{a_1}>n$，

即$a_n<\frac{1}{n}$，故不等式得证．

14 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，证明：$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}\,(n>2)$．

答案 证明见解析．

解析 由$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，

两边进行平方得$a_{n+1}^2-a_n^2=2+\frac{1}{a_n^2}$，

累加并化简得$a_n^2=a_1^2+2(n-1)+\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}$，

又$a_1^2+2(n-1)+\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}>1^2+2(n-1)=2n-1$，

所以$a_n>\sqrt{2n-1}$，

因为$a_n^2=2n-1+\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}$，且$a_n^2>2n-1$，

所以$\frac{1}{a_n^2}<\frac{1}{2n-1}\leqslant 1$，

又因为$\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}<n-1$，

所以$a_n^2=2n-1+\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}<3n-2\,(n>2)$，

即$a_n<\sqrt{3n-2}$，

综上，$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}\,(n>2)$，

故不等式得证．

二、伪等比放缩

考点3伪等比放缩

15 证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k-1}<\frac{5}{3}$．

答案 证明见解析．

解析 证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k-1}<\frac{5}{3}$．

令$a_n=\frac{1}{2^n-1}$，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2^n-1}{2^n-\frac{1}{2}}\right)<\frac{1}{2}\Rightarrow a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n$，又因为$a_1=1$，

$a_2=\frac{1}{3}$，由于不等式右边分母为3，因此从第三项开始放缩，得

$a_1+a_2+\cdots+a_n<a_1+a_2+\frac{1}{2}a_2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}a_2$

$=1+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}<\frac{5}{3}$．故不等式得证．

16 证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2^k-1)(2^{k+1}-1)}<\frac{19}{42}$．

答案 证明见解析．

解析 令通项$a_n=\dfrac{1}{(2^n-1)\left(2^{n+1}-1\right)}$，于是有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(2^n-1)\left(2^{n+1}-1\right)}{\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^{n+2}-1\right)}=$
$\dfrac{1}{4}\dfrac{(2^n-1)\left(2^{n+1}-1\right)}{\left(2^n-\dfrac{1}{2}\right)\left(2^{n+1}-\dfrac{1}{2}\right)}<\dfrac{1}{4}\Rightarrow a_{n+1}<\dfrac{1}{4}a$，
又由于$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_2=\dfrac{1}{21}$，
因此从第三项开始放缩，得

$a_1+a_2+\cdots+a_n<a_1+a_2+\dfrac{1}{4}a_2+\cdots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}a_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\dfrac{1}{21}\left(1-\dfrac{1}{4^{n-2}}\right)}{1-\dfrac{1}{4}}<\dfrac{25}{63}<\dfrac{19}{42}$．故

不等式得证．

17 数列$\{a_n\}$满足$a_n=3^n-2^n$，求证：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$．

答案 证明见解析．

解析 ①先证$3^n-2^n>3^{n-1}$（$n\geqslant 2$），

即$2\cdot 3^{n-1}>2^n$，

$\because 2\cdot 3^{n-1}>2\cdot 2^{n-1}=2^n$，

$\therefore 3^n-2^n>3^{n-1}$．

②再证$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$，
$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，
$=\dfrac{1}{3-2}+\dfrac{1}{3^2-2^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n-2^n}$
$<1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}$
$=1+\dfrac{1}{3}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1}{3}}$
$=1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)<\dfrac{3}{2}$．
证毕．

18 已知$a_n=2^n-1$，证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$．

答案 证明见解析．

解析 因为$\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{2^k-1}{2\left(2^k-\frac{1}{2}\right)}<\frac{1}{2}$，

所以$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$，

要证明不等式的左边，只需把不等式边形即可，即$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-\frac{1}{2}\right)>-\frac{1}{3}$，

因为$\frac{a_k}{a_{k+1}}-\frac{1}{2}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2^{k+2}-2}$，

所以只要证明$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+2}-2}<\frac{1}{3}$，

令$b_n=\frac{1}{2^{n+2}-2}$，则$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+3}-2}<\frac{1}{2}\Rightarrow b_{n+1}<\frac{1}{2}b_n$，

于是$b_1+b_2+\cdots+b_n<b_1+\frac{1}{2}b_n+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}b_1=\frac{1}{6}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^n}<\frac{1}{3}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-\frac{1}{2}\right)>-\frac{1}{3}\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}}>\frac{n}{2}-\frac{1}{3}$，

综上，$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$，

故不等式得证．

19 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+2}$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k<2n+\frac{4}{3}$．

答案 证明见解析．

解析 要证明$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k<2n+\frac{4}{3}$，只需证明$\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-2)<\frac{4}{3}$．

因为$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+2}$，易知数列$\{a_n\}$为减数列，所以$a_n\in(2,3]$．

又因为$a_n-2=$

$\frac{3a_{n-1}+2-2a_{n-1}-4}{a_{n-1}+2}=\frac{a_{n-1}-2}{a_{n-1}+2}\Rightarrow\frac{a_n-2}{a_{n-1}-2}=\frac{1}{a_{n-1}+2}<\frac{1}{4}\Rightarrow a_n-2<\frac{1}{4}(a_{n-1}-2)$，且

$a_1-2=1$，

所以$\sum_{k=1}^{n}(a_k-2)<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}-\frac{4}{4^n}<\frac{4}{3}$，即

$\sum_{k=1}^{n}a_k<2n+\frac{4}{3}$．

故不等式得证．

20 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=n$，设$b_n=2a_{n+1}$，证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{7}<\frac{b_1-1}{b_2-1}+\frac{b_2-1}{b_3-1}+\cdots+\frac{b_n-1}{b_{n+1}-1}<\frac{n}{2}$

．

答案 证明见解析．

解析 $b_n=2^{n+1}$，

因为$\frac{b_n-1}{b_{n+1}-1}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}-1}<\frac{1}{2}$，

所以$\frac{b_1-1}{b_2-1}+\frac{b_2-1}{b_3-1}+\cdots+\frac{b_n-1}{b_{n+1}-1}<\frac{n}{2}$，

要证明不等式$\frac{n}{2}-\frac{1}{7}<\frac{b_1-1}{b_2-1}+\frac{b_2-1}{b_3-1}+\cdots\frac{b_n-1}{b_{n+1}-1}$，

只需证明$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k-1}{b_{k+1}-1}-\frac{1}{2}\right)>-\frac{1}{7}$，

因为$\frac{b_n-1}{b_{n+1}-1}-\frac{1}{2}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}-1}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2^{n+3}-2}$，

所以只要证明$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+3}-2}<\frac{1}{7}$，

令$c_n=\frac{1}{2^{n+3}-2}$，$\frac{c_n}{c_n+1}=\frac{2^{n+3}-2}{2^{n+4}-2}<\frac{1}{2}$，

又因为$c_1=\frac{1}{14}$，

所以$c_1+c_2+\cdots+c_n<c_1+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2^2}c_1+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}c_1=\frac{1}{14}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}-\frac{1}{7\cdot 2^n}<\frac{1}{7}$，

因此$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k-1}{b_{k+1}-1}-\frac{1}{2}\right)>-\frac{1}{7}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k-1}{b_{k+1}-1}>\frac{n}{2}-\frac{1}{7}$，

综上，$\frac{n}{2}-\frac{1}{7}<\frac{b_1-1}{b_2-1}+\frac{b_2-1}{b_3-1}+\cdots+\frac{b_n-1}{b_{n+1}-1}<\frac{n}{2}$，

故不等式得证．

21 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\frac{4^n+2}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$．证明：$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{2n+1}{8}(n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 证明见解析．

解析 要证明不等式$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{2n+1}{8}(n\in\mathbf{N}^*)$，只需证$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-\frac{1}{4}\right)<\frac{1}{8}$，

因为$\frac{a_k}{a_{k+1}}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4^{n+2}+8}<\frac{6}{4^{n+2}}$，令$b_n=\frac{6}{4^{n+2}}$，

则$b_1+b_2+\cdots+b_n<b_1+\frac{1}{4}b_1+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}b_1=\frac{6}{64}\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8\times4^n}<\frac{1}{8}$，

即$\sum_{k=1}^{n}(\frac{a_k}{a_{k+1}}-\frac{1}{4})<\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{2n+1}{8}(n\in\mathbf{N}^*)$．

故不等式得证．

三、真题再现

22 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2(S_n+n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，令$b_n=a_n+1$．

（1）求证：$\{b_n\}$是等比数列．

（2）记数列$\{nb_n\}$的前n项和为T_n，求T_n．

（3）求证：$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3^n}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{11}{16}$．

答案 （1）证明见解析．

（2）$T_n=\frac{2n-1}{4}\times3^{n+1}+\frac{3}{4}$．

（3）证明见解析．

解析 （1）$a_1=2$，$a_{n+1}=2(S_n+n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore a_2=2\times(2+1+1)=8$，

$n\geqslant2$时，$a_n=2(S_{n-1}+n)$，相减可得：$a_{n+1}=3a_n+2$，

变形为：$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，$n=1$时也成立，

令$b_n=a_n+1$，则$b_{n+1}=3b_n$，

$\therefore\{b_n\}$是等比数列，首项为3，公比为3．

（2）由（1）可得：$b_n=3^n$，

$\therefore$数列$\{nb_n\}$的前n项和$T_n=3+2\times3^2+3\times3^3+\ldots+n\cdot3^n$，

$3T_n=3^2+2\times3^3+\ldots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1}$，

$\therefore-2T_n=3+3^2+\ldots+3^n-n\cdot3^{n+1}$

$=\dfrac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^{n+1}$

$=\dfrac{1-2n}{2}\times 3^{n+1}-\dfrac{3}{2}$，

解得$T_n=\dfrac{2n-1}{4}\times 3^{n+1}+\dfrac{3}{4}$．

（3）$\because b_n=3^n=a_n+1$，解得$a_n=3^n-1$，

由$\dfrac{1}{a_k}=\dfrac{1}{3^k-1}>\dfrac{1}{3^k}$，

$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}$

$=\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3^n}$，因此左边不等式成立，

又由$\dfrac{1}{a_k}=\dfrac{1}{3^k-1}$

$=\dfrac{3^{k+1}-1}{(3^k-1)(3^{k+1}-1)}<\dfrac{3^{k+1}}{(3^k-1)(3^{k+1}-1)}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3^k-1}-\dfrac{1}{3^{k+1}-1}\right)$，

可得

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1}{2}$

$+\dfrac{3}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3^2-1}-\dfrac{1}{3^3-1}\right)+\left(\dfrac{1}{3^3-1}-\dfrac{1}{3^4-1}\right)\ldots+\left(\dfrac{1}{3^n-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)<\dfrac{11}{16}$，因此右边不等式成立．

综上可得：$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\times 3^n}<\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{11}{16}$．

23 已知数列$\{a_n\}$满足条件$a_1=1$，$a_2=\sqrt{2}$，对于$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_{n+2}=\sqrt{2}a_n$．

（1）设$b_n=a_{2n}-a_{2n-1}$，求证：$\{b_n\}$为等比数列．

（2）设$c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{c_k}<4+3\sqrt{2}$．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

解析 （1）$\because a_1=1$，$a_2=\sqrt{2}$，$a_{n+2}=\sqrt{2}a_n$

$\therefore a_n=\begin{cases}\sqrt{2}^{\frac{n-1}{2}}, n\text{为奇数}\\ \sqrt{2}^{\frac{n}{2}}, n\text{为偶数}\end{cases}$，

$\therefore b_n=a_{2n}-a_{2n-1}=\sqrt{2}^n-\sqrt{2}^{n-1}=(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}^{n-1}$，

$\therefore\{b_n\}$是首项为$\sqrt{2}-1$，公比为$\sqrt{2}$的等比数列．

（2）$\because c_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}+\cdots+(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}^{n-1}$

$$=\sqrt{2}^n-1,$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}^k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}^{k+1}-1}{(\sqrt{2}^k-1)(\sqrt{2}^{k+1}-1)}$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}^{k+1}}{(\sqrt{2}^k-1)(\sqrt{2}^{k+1}-1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}^k-1}-\frac{1}{\sqrt{2}^{k+1}-1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}^{k+1}-1}\right)$$

$$<\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2}=4+3\sqrt{2}.$$

24 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$．设S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，已知$b_1\neq0$，$2b_n-b_1=S_1\cdot S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

（2）设$c_n=b_n\cdot\log_3 a_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n．

（3）证明：对任意$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant2$，有$\dfrac{1}{a_2-b_2}+\dfrac{1}{a_3-b_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n-b_n}<\dfrac{3}{2}$．

答案 （1）$a_n=3^{n-1}$，$b_n=2^{n-1}$．

（2）$T_n=(n-2)2^n+2$．

（3）答案见解析．

解析 （1）$\because a_{n+1}=3a_n$，

$\therefore\{a_n\}$是公比为3，首项$a_1=1$的等比数列，

$\therefore$通项公式为$a_n=3^{n-1}$．

$\because 2b_n-b_1=S_1\cdot S_n$，

$\therefore$当$n=1$时，$2b_1-b_1=S_1\cdot S_1$，

$\because S_1^2=b_1$，$b_1\neq0$，$\therefore b_1=1$．

$\therefore$当$n>1$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=2b_n-2b_{n-1}$，

$\therefore b_n=2b_{n-1}$，

$\therefore\{b_n\}$是公比为2，首项$a_1=1$的等比数列，

$\therefore$通项公式为$b_n=2^{n-1}$．

（2）$c_n=b_n\cdot\log_3 a_n=2^{n-1}\log_3 3^{n-1}=(n-1)2^{n-1}$，

$T_n=0\cdot2^0+1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+(n-2)2^{2n-2}+(n-1)2^{2n-1}\ldots$①

$2T_n=0\cdot2^1+1\cdot2^2+2\cdot2^3+\ldots+(n-2)2^{2n-1}+(n-1)2^{2n}\ldots$②

①−②得：$-T_n=0\cdot2^0+2^1+2^2+2^3\ldots+2^{2n-1}-(n-1)2^{2n}$

$=2^n-2-(n-1)2^n=-2-(n-2)2^n$

$\therefore T_n=(n-2)2^n+2$.

（3）$\dfrac{1}{a_n-b_n}=\dfrac{1}{3^{n-1}-2^{n-1}}=\dfrac{1}{3\cdot3^{n-2}-2^{n-1}}=\dfrac{1}{3^{n-2}+2(3^{n-2}-2^{n-2})}$

$\leqslant\dfrac{1}{3^{n-2}}+\dfrac{1}{a_2-b_2}+\dfrac{1}{a_3-b_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n-b_n}$

$<\dfrac{1}{3^0}+\dfrac{1}{3^1}+\ldots+\dfrac{1}{3^{n-2}}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)<\dfrac{3}{2}$.

25 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n . 已知$a_1=1$，$\dfrac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\dfrac{1}{3}n^2-n-\dfrac{2}{3}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求a_2的值 .

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式 .

（3）证明：对一切正整数n，有$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{7}{4}$.

答案 （1）$a_2=4$；　.

（2）$a_n=n^2$.

（3）证明见解析 .

解析 （1）依题意,$2S_1=a_2-\dfrac{1}{3}-1-\dfrac{2}{3}$，

又$S_1=a_1=1$，所以$a_2=4$.

（2）当$n\geqslant2$时,$2S_n=na_{n+1}-\dfrac{1}{3}n^3-n^2-\dfrac{2}{3}n,$

$2S_{n-1}=(n-1)\,a_n-\dfrac{1}{3}(n-1)^3-(n-1)^2-\dfrac{2}{3}(n-1)$ 两式相减得

$2a_n=na_{n+1}-(n-1)\,a_n-\dfrac{1}{3}\left(3n^2-3n+1\right)-(2n-1)-\dfrac{2}{3}$，

整理得$(n+1)\,a_n=na_{n+1}-n\,(n+1),$

即$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=1$，

又$\dfrac{a_2}{2}-\dfrac{a_1}{1}=1$，

故数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是首项为$\dfrac{a_1}{1}=1$，公差为1的等差数列,

所以$\dfrac{a_n}{n}=1+(n-1)\times1=n$,所以$a_n=n^2$.

（3）当$n=1$时，$\frac{1}{a_1}=1<\frac{7}{4}$；

当$n=2$时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}<\frac{7}{4}$；

当$n\geqslant 3$时，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，

此时$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$<1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\frac{7}{4}-\frac{1}{n}<\frac{7}{4}$，

综上，对一切正整数n，有$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{7}{4}$．

26 已知非单调数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，且$a_1=-\frac{1}{4}$，$a_2=16a_4$，记$b_n=\frac{5a_n}{1-a_n}$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式．

（2）若对任意正整数n，$|m-1|\geqslant 3b_n$都成立，求实数m的取值范围．

（3）设数列$\{b_{2n}\}$，$\{b_{2n-1}\}$的前n项和分别为S_n，T_n．证明：对任意的正整数n，都有$2S_n<2T_n+3$．

答案 （1）$a_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^n$．

（2）$m\geqslant 2$或$m\leqslant 0$．

（3）证明见解析．

解析 （1）$\because$数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，且$a_1=-\frac{1}{4}$，$a_2=16a_4$，

$\therefore q^2=\frac{a_4}{a_2}=\frac{1}{16}$，解得$q=\pm\frac{1}{4}$，

$\because$数列是非单调数列，$\therefore q=-\frac{1}{4}$，

则$a_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^n$．

（2）由$b_n=\frac{5a_n}{1-a_n}$，得$b_n=\frac{5}{\frac{1}{a_n-1}}=\frac{5}{(-4)^n-1}$，

当n为奇数时，$b_n=\frac{5}{-4^n-1}<0$，

当n为偶数时，$b_n=\frac{5}{4^n-1}>0$，且$\{b_n\}$为减函数，

$\therefore\{b_n\}_{\max}=b_2=\frac{1}{3}$，则$|m-1|\geqslant 3b_n=1$，解得$m\geqslant 2$或$m\leqslant 0$．

（3）$\because b_{2n}-b_{2n-1}=\frac{5}{4^{2n}-1}+\frac{5}{4^{2n-1}+1}=\frac{5(4^{2n-1}+4^{2n})}{(4^{2n-1}-1)(4^{2n-1}+1)}$

$=\frac{5(4^{2n-1}+4^{2n})}{4^{4n-1}+4^{2n}+4^{2n-1}-1}<\frac{5(4^{2n-1}+4^{2n})}{4^{4n-1}}=\frac{25}{4^{2n}}=\frac{25}{16^n}$，

$\therefore S_n-T_n=(b_2-b_1)+(b_4-b_3)+\cdots+(b_{2n}-b_{2n-1})$

$<\dfrac{5}{15}+\dfrac{5}{5}+25\left(\dfrac{1}{16^2}+\dfrac{1}{16^3}+\cdots+\dfrac{1}{16^n}\right)$

$=\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{48}\left(1-\dfrac{1}{16^n}\right)<\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{48}=\dfrac{69}{48}<\dfrac{3}{2}$，

$\therefore 2S_n-2T_n<3$，即$2S_n<2T_n+3$．

27 已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_n=na_n-3n(n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_2=11$．

（1）求a_1的值．

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n．

（3）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\sqrt{\dfrac{n}{S_n}}$，求证：$b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{2}{3}\sqrt{3n+2}$．

答案 （1）5

（2）$S_n=3n^2+2n$．

（3）证明见解析．

解析 （1）$\because S_n=na_n-3n(n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_2=11$．

$\therefore S_2=a_1+a_2=2a_2-3\times2(2-1)$，

$\because a_2=11$，解得$a_1=5$．

（2）当$n\geqslant 2$时，由$a_n=S_n-S_{n-1}$，

得$a_n=na_n-3n(n-1)-[(n-1)a_{n-1}-3(n-1)(n-2)]$，

$\therefore (n-1)a_n-(n-1)a_{n-1}=6(n-1)$，

$\therefore a_n-a_{n-1}=6$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项$a_1=5$，公差为6的等差数列，

$\therefore a_n=a_1+6(n-1)=6n-1$，

$\therefore S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=3n^2+2n$．

（3）$\because b_n=\sqrt{\dfrac{n}{S_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3n+2}}<\dfrac{2}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}}$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}\right)}{\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}\right)\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}\right)}=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}\right)$．

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{2}{3}\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)+\cdots+\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}\right)\right]$

$=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}\right)<\dfrac{2}{3}\sqrt{3n+2}$，

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{2}{3}\sqrt{3n+2}$．