

解答题训练3（数列放缩）

一、裂项放缩

考点1： $a_n = \frac{1}{n^2}$ 型

1 求证： $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

2 求证： $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$

3 求证： $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$.

4 求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4}$.

5 已知 $a_n = \frac{n}{2}$, $b_n = n^2$, 设 $c_n = \frac{1}{a_n + b_n}$, 求证： $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{4}{3}$.

6 求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \frac{29}{24}$.

7 求证： $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k\sqrt{k}} < \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

8 求证： $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} < \frac{7}{10}$.

9 求证：对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.



考点2：迭代型

10 若数列 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, 求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k + 1} < \frac{1}{2}$.

11 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = \frac{b_n^2}{(n+1)^2} + b_n$, 证明： $b_n < 1$.

12 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$, $a_1 = 0$, $a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 = a_n^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

$$T_n = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

求证: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时,

(1) $a_n < a_{n+1}$;

(2) $S_n > n - 2$;

(3) $T_n < 3$.

13 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明: $a_n < \frac{1}{n}$.

14 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, 证明: $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$ ($n > 2$).

二、伪等比放缩



考点3 伪等比放缩

15 证明： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k - 1} < \frac{5}{3}$.

16 证明： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2^k - 1)(2^{k+1} - 1)} < \frac{19}{42}$.

17 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3^n - 2^n$, 求证： $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

18 已知 $a_n = 2^n - 1$, 证明 : $\frac{n}{2} - \frac{1}{3} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{2}$.

19 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$, 求证 : $\sum_{k=1}^n a_k < 2n + \frac{4}{3}$.

20 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n$, 设 $b_n = 2a_{n+1}$, 证明 : $\frac{n}{2} - \frac{1}{7} < \frac{b_1 - 1}{b_2 - 1} + \frac{b_2 - 1}{b_3 - 1} + \cdots + \frac{b_n - 1}{b_{n+1} - 1} < \frac{n}{2}$.

21 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{4^n + 2}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$. 证明: $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{2n+1}{8} (n \in \mathbf{N}^*)$.

三、真题再现

22 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(S_n + n + 1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 令 $b_n = a_n + 1$.

(1) 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 记数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

(3) 求证: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{11}{16}$.

23 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$, 对于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+2} = \sqrt{2}a_n$.

(1) 设 $b_n = a_{2n} - a_{2n-1}$, 求证: $\{b_n\}$ 为等比数列.

(2) 设 $c_n = \sum_{k=1}^n b_k$, 求证: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} < 4 + 3\sqrt{2}$.

24 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$. 设 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $b_1 \neq 0$,

$$2b_n - b_1 = S_1 \cdot S_n, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = b_n \cdot \log_3 a_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 证明: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$, 有 $\frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \dots + \frac{1}{a_n - b_n} < \frac{3}{2}$.

25 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1$, $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.

26 已知非单调数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = 16a_4$, 记 $b_n = \frac{5a_n}{1-a_n}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若对任意正整数 n , $|m-1| \geq 3b_n$ 都成立, 求实数 m 的取值范围.

(3) 设数列 $\{b_{2n}\}$, $\{b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和分别为 S_n , T_n . 证明: 对任意的正整数 n , 都有

$$2S_n < 2T_n + 3.$$

27 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = na_n - 3n(n-1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_2 = 11$.

(1) 求 a_1 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \sqrt{\frac{n}{S_n}}$, 求证: $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{2}{3}\sqrt{3n+2}$.