

解答题训练2 (圆锥曲线)

宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来。

一、圆锥曲线题目训练

1 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ，且离心率 $e = \frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆方程；

(2) 若直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆交于不同的两点 M, N ，且线段 MN 的垂直平分线过定点 $G\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ ，求 k 的取值范围。

2 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 4, 且以双曲线 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 的实轴为短轴, 斜率为 k 的直线 l 经过点 $M(0, 1)$, 与椭圆 C 交于不同两点 A, B .

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 当椭圆 C 的右焦点 F 在以 AB 为直径的圆内时, 求 k 的取值范围.

3 设椭圆的中心在坐标原点，对称轴是坐标轴，一个顶点为 $A(0, 2)$ ，右焦点 F 到点 $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 的距离为 2 .

(1) 求椭圆的方程 .

(2) 设经过点 $Q(0, -3)$ 的直线 l 与椭圆相交于不同两点 M, N 满足 $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AN}|$ 试求直线 l 的方程 .

4 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

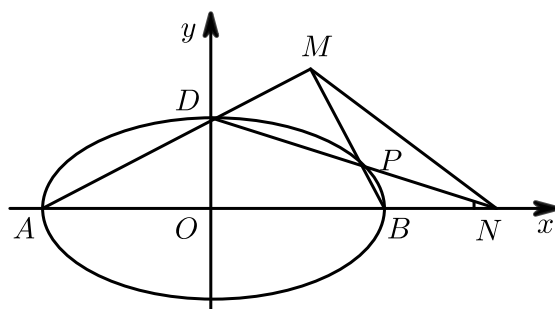
(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点), 求

$|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA}$ 的最大值.

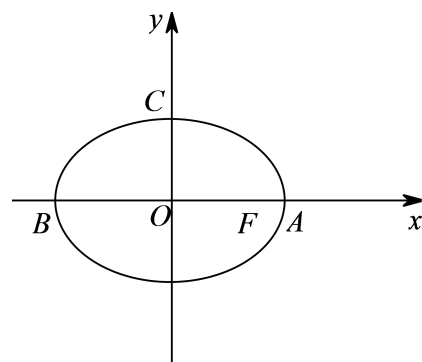
5 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a + b = 3$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 如图 A, B, D 是椭圆 C 的顶点, P 是椭圆 C 上除顶点外的任意点, 直线 DP 交 x 轴于点 N , 直线 AD 交 BP 于点 M , 设 BP 的斜率为 k_1 , MN 的斜率为 k_2 , 是否存在实数 λ 使 $k_1 - \lambda k_2$ 为定值? 如果存在, 求出 λ , 否则说明理由.



- 6 如图, A, B, C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的顶点, 点 $F(c, 0)$ 为椭圆的右焦点, 原点 O 到直线 CF 的距离为 $\frac{1}{2}c$, 且椭圆过点 $(2\sqrt{3}, 1)$.



- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 若 P 是椭圆上除顶点外任意一点, 直线 CP 交 x 轴于点 E , 直线 BC 与 AP 相交于点 D , 连接 DE . 设直线 AP 的斜率为 k , 直线 DE 的斜率为 k_1 , 问是否存在实数 λ , 使得 $\lambda k_1 = k + \frac{1}{2}$ 成立? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

7 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H , 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA = \angle MAO$, 求直线的 l 斜率.

二、限时训练

本部分共9个选择题，限时25分钟.

- 8 设集合 $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-1} = 2, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | 4x + ay - 16 = 0, x, y \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 a 的值为 ().

A. 4 B. -2 C. 4或-2 D. -4或2

- 9 已知 a, b 是两条不同的直线, α 是平面, 且 $b \subset \alpha$, 那么“ $a // \alpha$ ”是“ $a // b$ ”的 ().

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

- 10 已知函数 $f(x) = |x| + \cos x$, 设 $a = f(2^{0.3})$, $b = f(0.3^2)$, $c = f(\log_{0.3} 2)$, 则 ().

A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$

- 11 已知变量 x, y 之间的线性回归方程为 $y = -0.7x + 10.3$, 且变量 x, y 之间的一组相关数据如表所示, 则下列说法错误的是 ().

x	6	8	10	12
y	6	m	3	2

A. 变量 x, y 之间呈现负相关关系 B. 可以预测, 当 $x = 20$ 时, $y = -3.7$
C. $m = 4$ D. 由表格数据可知, 该回归直线必过点 $(9, 4)$

- 12 若直线 $ax + y - a + 1 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点 (其中 O 为坐标原点), 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的最小值为 ().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

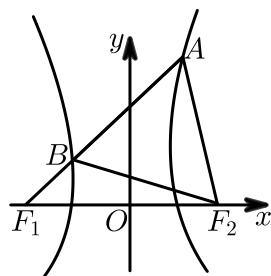
- 13 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > 0, b_2 > 0)$ 有相同的焦点 F_1, F_2 , 若点 P 是 C_1 与 C_2 在第一象限内的交点, 且 $|F_1F_2| = 2|PF_2|$, 设 C_1 与 C_2 的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $e_2 - e_1$ 的取值范围是 ().

A. $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

- 14 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} (\omega > 0)$, $x \in \mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{1}{8}\right]$ B. $\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right)$ C. $\left(0, \frac{5}{8}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right)$

- 15 如图, F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ 的直线 l 与双曲线分别交于点 A, B , 若 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 则双曲线的方程为 ().



A. $\frac{5x^2}{7} - \frac{5y^2}{28} = 1$ B. $\frac{x^2}{6} - y^2 = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{5x^2}{28} - \frac{5y^2}{7} = 1$

- 16 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in [0, 1) \\ -(\frac{1}{2})^{|x-\frac{3}{2}|}, & x \in [1, 2) \end{cases}$, 若当 $x \in [-4, -2)$ 时, $f(x) \geq \frac{t^2}{4} - t + \frac{1}{2}$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围为 ().

A. $2 \leq t \leq 3$ B. $1 \leq t \leq 3$ C. $1 \leq t \leq 4$ D. $2 \leq t \leq 4$