

解答题训练1

一、三角函数与解三角形

1 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c ，已知 $a \sin 2B = \sqrt{3}b \sin A$ 。

(1) 求 B ；

(2) 若 $\cos A = \frac{1}{3}$ ，求 $\sin C$ 的值。

2 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $b + c = 2a$ ， $3c \sin B = 4a \sin C$ 。

(1) 求 $\cos B$ 的值。

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

3 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 为三个内角, 已知 $A = 45^\circ$, $\cos B = \frac{4}{5}$.

(1) 求 $\sin C$ 的值.

(2) 若 $BC = 10$, D 为 AB 的中点, 求 CD 的长及 $\triangle ABC$ 的面积.

4 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{a+b}{\sin(A+B)} = \frac{a-c}{\sin A - \sin B}$.

(1) 求角 B .

(2) 若 $b = 3$, $\cos A = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

5 已知函数 $f(x) = (\sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x) \cos \omega x - \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R}, \omega > 0)$. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 4π .

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c 满足 $(2a - c) \cos B = b \cos C$, 求函数 $f(A)$ 的取值范围.

6 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $2b \sin A = \sqrt{3}a$.

(1) 求角 B 的大小.

(2) 若 $a + c = 5$, 且 $a > c$, $b = \sqrt{7}$, 求 $\cos(2A + B)$.

7 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $f(x) = 2 \sin(x - A) \cos x + \sin(B + C) (x \in \mathbf{R})$, 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称.

(1) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

(2) 若 $a = 7$ 且 $\sin B + \sin C = \frac{13\sqrt{3}}{14}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

二、分布列

- 8 某商场举行的“三色球”购物摸奖活动规定：在一次摸奖中，摸奖者先从装有3个红球与4个白球的袋中任意摸出3个球，再从装有1个篮球与2个白球的袋中任意摸出1个球，根据摸出4个球中红球与篮球的个数，设一、二、三等奖如下：

奖级	摸出红、篮球个数	获奖金额
一等奖	3红1蓝	200元
二等奖	3红0蓝	50元
三等奖	2红1蓝	10元

其余情况无奖且每次摸奖最多只能获得一个奖级。

- (1) 求一次摸球恰好摸到1个红球的概率；
- (2) 求摸奖者在一次摸奖中获奖金额 X 的分布列与期望 $E(X)$ 。

9 学校游园活动有这样一个游戏项目：甲箱子里装有3个白球、2个黑球，乙箱子里装有1个白球、2个黑球，这些球除颜色外完全相同，每次游戏从这两个箱子里各随机摸出2个球，若摸出的白球不少于2个，则获奖。（每次游戏结束后将球放回原箱）

（1）求在1次游戏中，

① 摸出3个白球的概率。

② 获奖的概率。

（2）求在2次游戏中获奖次数 X 的分布列及数学期望 $E(X)$ 。

10 某大学志愿者协会有6名男同学，4名女同学．在这10名同学中，3名同学来自数学学院，其余7名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院．现从这10名同学中随机选取3名同学，到希望小学进行支教活动（每位同学被选到的可能性相同）．

（1）求选出的3名同学是来自互不相同学院的概率．

（2）设 X 为选出的3名同学中女同学的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

11 随着网络营销和电子商务的兴起，人们的购物方式更具多样化，某调查机构随机抽取10名购物者进行采访．5名男性购物者中有3名倾向于选择网购，2名倾向于选择实体店．5名女性购物者中有2名倾向于选择网购，3名倾向于选择实体店．

（1）若从10名购物者中随机抽取2名，其中男，女各一名，求至少1名倾向于选择实体店的概率．

（2）若从这10名购物者中随机抽取3名，设 X 表示抽到倾向于选择网购的男性购物者的人数，求 X 的分布列和数学期望．

12 现有10道题，其中6道甲类题，4道乙类题，张同学从中任取3道题解答．

(1) 求张同学至少取到1道乙类题的概率；

(2) 已知所取的3道题中有2道甲类题，1道乙类题．设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$ ，答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$ ，且各题答对与否相互独立．用 X 表示张同学答对题的个数，求 X 的分布列和数学期望．

13 本着健康、低碳的生活理念，租自行车骑游的人越来越多．某自行车租车点的收费标准是每车每次租车时间不超过两小时免费，超过两小时的部分每小时收费2元（不足1小时的部分按1小时计算）．有甲、乙两人相互独立来该租车点租车骑游（各租一车一次），设甲、乙不超过两小时还车的概率分别为 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{2}$ ；两小时以上且不超过三小时还车的概率分别为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{4}$ ；两人租车时间都不会超过四小时．

(1) 求出甲、乙所付租车费用相同的概率．

(2) 求甲、乙两人所付的租车费用之和为随机变量 ξ ，求 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi$ ．

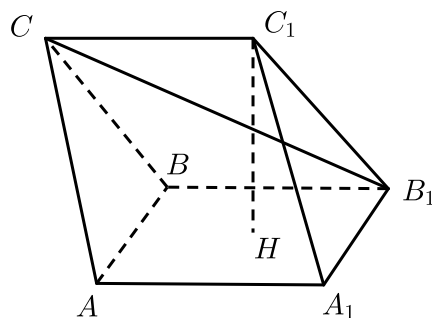
14 某校为了普及环保知识，增强学生的环保意识，在全校组织了一次有关环保知识的竞赛．经过初赛、复赛，甲、乙两个代表队（每队3人）进入了决赛，规定每人回答一个问题，答对为本队赢得10分，答错得0分．假设甲队中每人答对的概率均为 $\frac{3}{4}$ ，乙队中3人答对的概率分别为 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{4}{5}$ ， $\frac{2}{3}$ ，且各人回答正确与否相互之间没有影响，用 x 表示乙队的总得分．

（1）求 x 的分布列及数学期望．

（2）求甲、乙两队总得分之和等于30分且甲队获胜的概率．

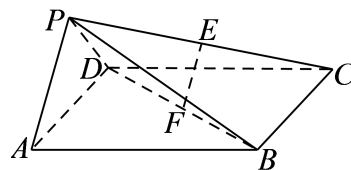
三、立体几何

15 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, H 是正方形 AA_1B_1B 的中心, $AA_1=2\sqrt{2}$, $C_1H\perp$ 平面 AA_1B_1B ,且 $C_1H=\sqrt{5}$



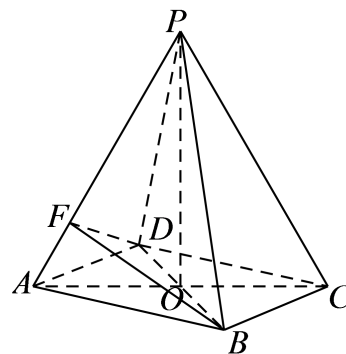
- (1) 求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值.
- (2) 求二面角 $A - A_1C_1 - B_1$ 的正弦值.
- (3) 设 N 为棱 B_1C_1 的中点, 点 M 在平面 AA_1B_1B 内, 且 $MN \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 求线段 BM 的长.

- 16 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$ ， E 、 F 分别为 PC 、 BD 的中点。



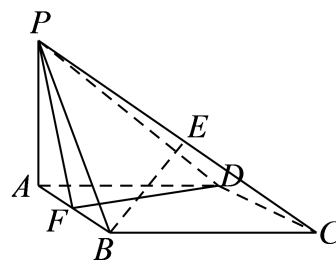
- (1) 求证： $EF \parallel$ 平面 PAD 。
- (2) 求证：面 $PAB \perp$ 平面 PDC 。
- (3) 在线段 AB 上是否存在点 G ，使得二面角 $C-PD-G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ？说明理由。

- 17 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC \cap BD = O$ ， $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形， $PB = PD = \sqrt{6}$ ， $AP = 4AF$ 。



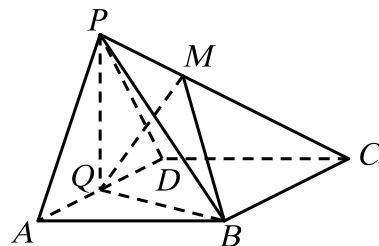
- (1) 求证： $PO \perp$ 底面 $ABCD$ 。
- (2) 求直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小。
- (3) 在线段 PB 上是否存在一点 M ，使得 $CM \parallel$ 平面 BDF ？如果存在，求 $\frac{BM}{BP}$ 的值，如果不存在，请说明理由。

- 18 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ， $PA = 1$ ， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是 PC 的中点， F 是 AB 的中点。



- (1) 求证： $BE \parallel$ 平面 PDF 。
- (2) 求证：平面 $PDF \perp$ 平面 PAB 。
- (3) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成的锐二面角的大小。

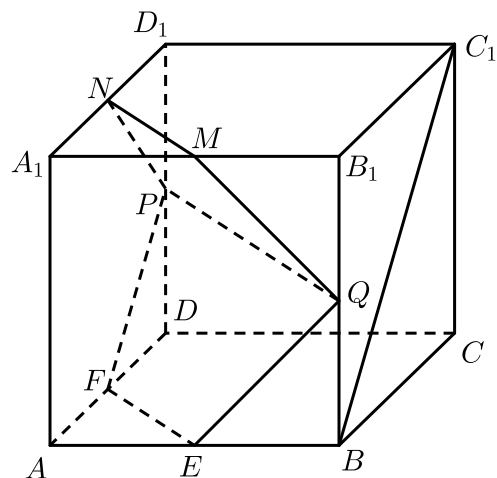
19 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， Q 为 AD 的中点。



- (1) 若 $PA = PD$ ，求证：平面 $PQB \perp$ 平面 PAD 。
- (2) 点 M 在线段 PC 上， $PM = tPC$ ，试确定实数 t 的值，使 $PA \parallel$ 平面 MQB 。
- (3) 在 (2) 的条件下，若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA = PD = AD = 2$ ，求二面角 $M-BQ-C$ 的大小。

- 天津考经系列课程——数学

- 21 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, M, N 分别是棱 AB, AD, A_1B_1, A_1D_1 的中点，点 P, Q 分别在棱 DD_1, BB_1 上移动，且 $DP = BQ = \lambda (0 < \lambda < 2)$ 。



- (1) 当 $\lambda = 1$ 时，证明：直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$ ；
- (2) 是否存在 λ ，使平面 $EFPQ$ 与面 $PQMN$ 所成的角为直角？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由。

四、限时训练

本部分共2个解答题，限时30分钟.

22 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B 、 D 两点, 且 A 、 B 、 D 三点不重合.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 求证: 直线 AB 、 AD 的斜率之和为定值.

(3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值; 若不存在, 说明理由?

23 已知函数 $f(x) = \ln x - 2ax$ (其中 $a \in \mathbf{R}$) .

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程 .

(2) 若 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围 .

(3) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2$, 且函数 $g(x)$ 有极大值点 x_0 , 求证: $x_0 f(x_0) + 1 + ax_0^2 > 0$.