

易错点汇总

一、函数

1. 易错点：忽略定义域

1 方程 $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$ 的解为 _____ .

答案 2

解析 $\because \log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$,
 $\therefore \log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2[4 \times (3^{x-1} - 2)]$,
 $\therefore 9^{x-1} - 5 = 4(3^{x-1} - 2)$,
 化为 $(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$,
 因式分解为 : $(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$,
 $\therefore 3^x = 3$, $3^x = 9$,
 解得 $x = 1$ 或 2 ,
 经过验证 : $x = 1$ 不满足条件 , 舍去 ,
 $\therefore x = 2$,
 故答案为 : 2 .

变式训练

2 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 () .

A. $(-\infty, -2)$

B. $(-\infty, -1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(4, +\infty)$

答案 D

解析 由 $x^2 - 2x - 8 > 0$,

得： $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ ，

令 $t = x^2 - 2x - 8$ ，则 $y = \ln t$ ，

$\because x \in (-\infty, -2)$ 时， $t = x^2 - 2x - 8$ 为减函数，

$x \in (4, +\infty)$ 时， $t = x^2 - 2x - 8$ 为增函数．

$y = \ln t$ 为增函数．

故函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 $(4, +\infty)$ ．

故选：D．

【谨记】分式、对数、零次幂先处理定义域．

2. 易错点：二次函数的分类讨论

3 如果函数 $f(x) = \frac{1}{2}(m-2)x^2 + (n-8)x + 1$ ($m \geq 0, n \geq 0$)在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 单调递减，则 mn 的最大值为（ ）．

A. 16

B. 18

C. 25

D. $\frac{81}{2}$

答案 B

解析 $f'(x) = (m-2)x + n-8 = 0$ 得 $x = -\frac{n-8}{m-2}$ ．

当 $m > 2$ ，抛物线的对称轴为 $x = -\frac{n-8}{m-2}$ ，

据题意， $-\frac{n-8}{m-2} \geq 2$ 即 $2m+n \leq 12$ ．

因为 $\sqrt{2m+n} \leq \frac{2m+n}{2} \leq 6$ ，所以 $mn \leq 18$ ，

由 $2m+n=12$ 且 $2m=n$ 得 $m=3, n=6$ ；

当 $m < 2$ 时，抛物线开口向下，据题意得 $-\frac{n-8}{m-2} \leq \frac{1}{2}$ 即 $2n+m \leq 18$ ，

因为 $\sqrt{2m+n} \leq \frac{2n+m}{2} \leq 9$ ，所以 $mn \leq \frac{81}{2}$ ．由 $2n+m=18$ 且 $2n=m$ 得 $m=9$ （舍）．

要使得 $2mn$ 取最大值，应有 $2n+m=18$ ($m < 2, n > 8$)，

所以 $mn = (18-2n)n < (18-2 \times 8) \times 8 = 16$ ，

所以最大值为18．

故选B．

3. 易错点：分段函数单调递增充要条件

4 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \geq 1 \\ ax + a - 2, & x < 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，那么实数 a 的取值范围是 () .

A. $(1, +\infty)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, 2)$

D. $(1, 2]$

答案 D

解析 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \geq 1 \\ ax + a - 2, & x < 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $\begin{cases} a > 1 \\ a > 0 \\ a \geq a + a - 2 \end{cases}$ ，

解得 $1 < a \leq 2$ ，

则实数 a 的取值范围是 $(1, 2]$ ，

故选 D .

变式训练

5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x + 1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$)，在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是 () .

A. $(0, \frac{2}{3}]$

B. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$

C. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup \{\frac{3}{4}\}$

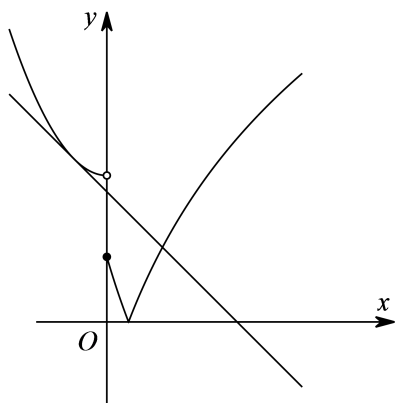
D. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{\frac{3}{4}\}$

答案 C

解析 由 $y = \log_a(x + 1) + 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上递减，则 $0 < a < 1$

又由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则：

$$\begin{cases} 0^2 + (4a - 3) \cdot 0 + 3a \geq f(0) = 1 \\ \frac{3 - 4a}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{4}$$



由图像可知，在 $[0, +\infty)$ 上， $|f(x)| = 2 - x$ 有且仅有一个解，

故在 $(-\infty, 0)$ 上， $|f(x)| = 2 - x$ 同样有且仅有一个解，

当 $3a > 2$ 即 $a > \frac{2}{3}$ 时，联立 $|x^2 + (4a - 3)x + 3a| = 2 - x$ ，

则 $\Delta = (4a - 2)^2 - 4(3a - 2) = 0$ ，解得： $a = \frac{3}{4}$ 或 1 （舍），

当 $1 \leq 3a \leq 2$ 时，由图像可知，符合条件。

综上： $\therefore a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$

选C。

【通解】分段函数单调递增充要条件：

①各段单调递增；

②**【易忘】**分隔点左小右大。

4. 易错点：分段函数零点个数问题

6 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x - a)(x - 2a), & x \geq 1 \end{cases}$ 。

①若 $a = 1$ ，则 $f(x)$ 的最小值为 _____；

②若 $f(x)$ 恰有2个零点，则实数 a 的取值范围是 _____。

答案

1: -1

2: $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$

解析

①当 $a = 1$ 时， $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < 1 \\ 4(x - 1)(x - 2), & x \geq 1 \end{cases}$ ，

$x < 1$ 时， $-1 < f(x) < 1$ ，

$$x \geq 1 \text{ 时, } f(x)_{\min} = f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$

所以 $f(x)_{\min} = -1$;

② (I) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 没有两个零点,

(II) 当 $0 < a < 1$ 时,

$$x < 1 \text{ 时, } 2^x - a = 0 \Rightarrow x = \log_2 a < 0,$$

$f(x)$ 有一个零点;

$$x \geq 1 \text{ 时, } f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = a, x_2 = 2a;$$

当 $2a \geq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时,

$f(x)$ 恰有两个零点,

所以当 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 时, $f(x)$ 恰有两个零点;

(III) 当 $1 \leq a < 2$ 时,

$$x < 1 \text{ 时, } 2^x - a = 0 \Rightarrow x = \log_2 a < 1,$$

$f(x)$ 有一个零点;

$$x \geq 1 \text{ 时, } f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = a,$$

$$x_2 = 2a, f(x) \text{ 有两个零点,}$$

此时 $f(x)$ 有三个零点;

(IV) 当 $a \geq 2$ 时,

$x < 1$ 时, 无零点;

$x \geq 1$ 时, 有两个零点, 此时 $f(x)$ 有两个零点.

综上所述 $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$.

【通解】 分段函数零点个数问题:

① 分别讨论各段零点可能情况;

② 分类讨论各段分别提供零点个数.

【易错点】 极易忽略临界点是否可以取等.

【谨记】 求得 a 值时, 考虑临界点时是否可以取等, 建议数形结合.



变式训练

已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 a 的取值范围是 _____ .

答案 (4, 8)

解析 当 $x \leq 0$ 时，

$$x^2 + 2ax + a = ax,$$

$$\text{即 } x^2 + ax + a = 0;$$

当 $x > 0$ 时，

$$-x^2 + 2ax - 2a = ax,$$

$$\text{即 } -x^2 + ax - 2a = 0,$$

$$\text{令 } g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$$

恰有两个不相等的实数根，有如下 3 种情况：

① 两根一正一负，则 $\begin{cases} a^2 - 4a = 0, a = 4, \\ a^2 - 8a = 0, a = 8. \end{cases}$ 显然不成立；

② 两根均为正，则 $\begin{cases} a^2 - 4a < 0, \\ a^2 - 8a > 0 \end{cases}$ ，无解；

③ 两根均为负，则 $\begin{cases} a^2 - 4a > 0, \\ a^2 - 8a < 0 \end{cases}$ ，解得 $a \in (4, 8)$ ；

综上所述， $a \in (4, 8)$.

二、概率

1. 易错点：条件概率

8 甲、乙二人争夺一场围棋比赛的冠军，若比赛为“三局两胜”制（无平局），甲在每局比赛中获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，且各局比赛结果相互独立，则在甲获得冠军的条件下，比赛进行了三局的概率为 () .

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{4}{5}$

答案 B

解析 由题意，甲获得冠军的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$ ，
其中比赛进行了3局的概率 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ ，
 $\therefore$ 所以概率为 $\frac{8}{27} \div \frac{20}{27} = \frac{2}{5}$ 。

故选B。

变式训练

9 已知一种元件的使用寿命超过1年的概率为0.8，超过2年的概率为0.6，若一个这种元件使用到1年时还未失效，则这个元件使用寿命超过2年的概率为（ ）。

- A. 0.75 B. 0.6 C. 0.52 D. 0.48

答案 A

解析 由题意有：因为这种元件的使用寿命超过1年的概率为0.8，超过2年的概率为0.6，
这种元件使用到1年时还未失效的前提下，这个元件使用寿命超过2年的概率为 $P = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$ ，
故选：A。

10 从标有1、2、3、4、5的五张卡片中，依次抽出2张，则在第一次抽到奇数的情况下，第二次抽到偶数的概率为（ ）。

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

答案 B

解析 从标有1、2、3、4、5的五张卡片中，依次抽出2张，
设事件A表示“第一张抽到奇数”，事件B表示“第二张抽取偶数”，
则 $P(A) = \frac{3}{5}$ ， $P(AB) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ ，
则在第一次抽到奇数的情况下，第二次抽到偶数的概率为：

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$$

故选B.

2. 易错点：状态问题

- 11 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）. 根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为0.6，客场取胜的概率为0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以4:1获胜的概率是_____.

答案 0.18

解析 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”.

设甲队主场取胜的概率为0.6，客场取胜的概率为0.5，且各场比赛结果相互独立，

甲队以4:1获胜包含的情况有：

①前5场比赛中，第一场负，另外4场全胜，其概率为： $p_1 = 0.4 \times 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.036$

,

②前5场比赛中，第二场负，另外4场全胜，其概率为： $p_2 = 0.6 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.036$

,

③前5场比赛中，第三场负，另外4场全胜，其概率为： $p_3 = 0.6 \times 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.054$

,

④前5场比赛中，第四场负，另外4场全胜，其概率为： $p_4 = 0.6 \times 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.054$

,

则甲队以4:1获胜的概率为：

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.036 + 0.036 + 0.054 + 0.054 = 0.18.$$

故答案为：0.18.

变式训练

- 12 甲、乙两人进行羽毛球比赛，比赛采取五局三胜制，约定无论哪一方先胜三局则比赛结束，假定甲每局比赛获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，则乙以3:1的比分获胜的概率为（ ）.

A. $\frac{8}{27}$

B. $\frac{2}{27}$

C. $\frac{32}{81}$

D. $\frac{64}{81}$

答案 B

解析

设 A 表示“每局比赛中甲获胜”，

则 $\bar{A}$ 表示“每局比赛中乙获胜”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{2}{3}, P(\bar{A}) = \frac{1}{3},$$

乙以 3:1 的比分获胜是指四局比赛中甲胜 1 局负 3 局，

且不含前三局乙胜第四局甲胜的情况，

$$\text{乙以 3:1 的比分获胜的概率: } P = C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27}.$$

故选 B.

3. 易错点：概率解答题易错点汇总

【概率解答题易错点汇总】

①区分二项分布和超几何分布：有放回为二项分布，不放回为超几何分布，可以理解为二项分布是在做重复的事情，超几何分布是一锤定音.

三、三角

1. 易错点：平移变换只针对 x

13 已知曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 则下面结论正确的是 ().

- A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2
- B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2
- C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2
- D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D

解析

$\therefore$ 从 $C_1: y = \cos x$ 变成 $C: y = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 只需把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2 .

14

- A. e^{x+1}
- B. e^{x-1}
- C. e^{-x+1}
- D. e^{-x-1}

D

解析

而函数 $f(x)$ 的图像向右平移1个单位长度，
所得图像与曲线 $y = e^x$ 的图像关于 y 轴对称，
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的解析式为 $y = e^{-(x+1)} = e^{-x-1}$ 。
即 $f(x) = e^{-x-1}$ 。

故选D.

15

- A. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$
 B. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$
 C. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$
 D. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$

B

解析

$$\text{令 } 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

得对称轴方程： $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ ，故选B.

2. 易错点：图象变换逆应用

16 由 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，再把所得图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍得到

$y = \sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right)$ 的图象，则 $f(x) = (\quad)$.

A. $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{6}\pi\right)$

B. $\sin\left(6x - \frac{1}{6}\pi\right)$

C. $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\pi\right)$

D. $\sin\left(6x + \frac{1}{3}\pi\right)$

答案 B

解析 由题意，将 $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，

可得函数 $y = \sin\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，

再把 $y = \sin\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，

可得 $f(x) = \sin\left[6\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

故选B.

变式训练

17 要得到函数 $y = \sqrt{2} \cos x$ 的图象，只需将函数 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有的点 $(\quad)$.

A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

D. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

答案 D

解析 据三角形函数图象性质，首先需将横坐标伸长到原来的2倍，得到 $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，再向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位可得 $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cos x$ ，故本题正确答案为D。

【注意】 图象变换明确原函数。

3. 易错点：三角函数 ω 取值范围问题

- 18 已知函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象在区间 $[0, 1]$ 上恰有3个最高点，则 ω 的取值范围为 ()。
- A. $\left[\frac{19\pi}{4}, \frac{27\pi}{4}\right)$
 B. $\left[\frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right)$
 C. $\left[\frac{17\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}\right)$
 D. $[4\pi, 6\pi)$

答案 C

解析 函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$)，
 $\because x \in [0, 1]$ 上，
 $\therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega + \frac{\pi}{4}\right]$ ，
 图象在区间 $[0, 1]$ 上恰有3个最高点，
 $\therefore \frac{9\pi}{2} \leq \omega + \frac{\pi}{4} < 6\pi + \frac{\pi}{2}$ ，
 解得： $\frac{17\pi}{4} \leq \omega < \frac{25\pi}{4}$ 。
 故选C。

变式训练

- 19 函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象在 $[0, 1]$ 上恰有两个最大值点，则 ω 的取值范围为 ()。
- A. $[2\pi, 4\pi]$
 B. $\left[2\pi, \frac{9\pi}{2}\right)$

- C. $\left[\frac{13\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}\right)$
D. $\left[2\pi, \frac{25\pi}{6}\right)$

答案 C

解析 函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$,

$\because x \in [0, 1]$ 上.

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq \omega + \frac{\pi}{3},$$

在 $[0, 1]$ 上恰有两个最大值点,

$$\therefore \frac{5\pi}{2} \leq \omega + \frac{\pi}{3} < \frac{9\pi}{2},$$

$$\text{解得: } \frac{13\pi}{6} \leq \omega < \frac{25\pi}{6}.$$

故选 C.

4. 易错点：三角解答题易错点汇总

【三角解答题易错点汇总】

- ① 求三角函数性质问题中，注意补上 $k \in \mathbf{Z}$ ；
- ② 解三角形问题中，留意题目中给的三角形是否限制了锐角或者钝角；
- ③ 解三角形问题中，当求得一角的正弦值时，需考虑是否要分类讨论此角度为钝角还是锐角；
- ④ 锐角三角形中，已知 $A + B = \frac{2\pi}{3}$ ，求 $\sin B - \sqrt{3} \cos A$ 取值范围时，转单变量解题时，**需注意角度的取值范围（ A, B 均为锐角）**。

四、数列

1. 易错点：数列单调性问题

20 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， S_n 为其前 n 项和，则“ $d > 0$ ”是“ $\{S_n\}$ 为递增数列”的（ ）。

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析

方法一：当 $n=1$ 时， $a_n = S_1 = 0$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $S_{n-1} = (n-1)^2 - 1$ ，

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$ ，

此时 $\{a_n\}$ 为公差是2的等差数列，

$\therefore a_n = \begin{cases} 0, n=1 \\ 2n-1, n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ ，

$\therefore a_3 = 5$ ， $a_9 = 17$ ，

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 0 + \frac{4(a_3 + a_9)}{2} = 44$ 。

故选B。

方法二：因为 $S_n = n^2 - 1$ ，

所以当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 1 - (n-1)^2 + 1 = 2n - 1$ ，

又 $a_1 = S_1 = 0$ ，

所以 $a_n = \begin{cases} 0, n=1 \\ 2n-1, n \geq 2 \end{cases}$ 易知 $\{a_n\}$ 从第二项起是等差数列，

所以 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 0 + 4a_6 = 4 \times (2 \times 6 - 1) = 44$ 。

故选B。

【注意】已知 S_n 求 a_n ，构造 S_{n-1} 作差求 a_n ，所求 a_n 满足 $n \geq 2$ ，需单独验证 a_1 。

3. 易错点：数列最值问题

23 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = 2$ ，对任意 $p, q \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_{p+q} = a_p + a_q$ ，则

$f(n) = \frac{S_n + 60}{n + 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的最小值为 _____。

答案 $\frac{29}{2}$

解析

$\because \forall p, q \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_{p+q} = a_p + a_q$ ，

$\therefore$ 取 $p = n$ ， $q = 1$ ，则 $a_{n+1} = a_n + a_1$ ，又 $a_1 = 2$ ，

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为2，公差为2的等差数列，则 $S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + n$ 。

$\therefore f(n) = \frac{n^2 + n + 60}{n + 1} = n + \frac{60}{n + 1} = n + 1 + \frac{60}{n + 1} - 1 \geq 4\sqrt{15} - 1$ ，

当且仅当 $n = 2\sqrt{15} - 1$ 时等号成立. 又 $2\sqrt{15} - 1 \notin \mathbf{N}^*$,

$\therefore$ 当 $n = 7$ 时, $f(n)$ 取得最小值 $\frac{29}{2}$.

变式训练

24 函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n) (n \in \mathbf{N}_+)$, 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则

实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left[\frac{9}{4}, 3\right)$

B. $\left(\frac{9}{4}, 3\right)$

C. $(2, 3)$

D. $(1, 3)$

答案 C

解析

因为 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$, $a = f(n)$,

则 $a_n = \begin{cases} (3-a)n-3, & n \leq 7 \\ a^{n-6}, & n > 7 \end{cases}$,

又因为数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $\begin{cases} 3-a > 0 \\ a > 1 \\ a^8 > a^7 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} a < 3 \\ a > 1 \\ a^2 > 7(3-a)-3 \end{cases}$,

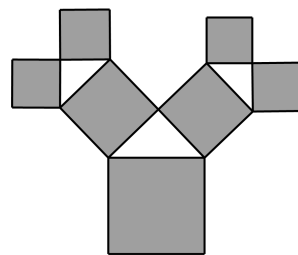
解得 $2 < a < 3$, 故实数 a 的取值范围为 $(2, 3)$.

故选: C.

【谨记】 当数列与函数综合考查时, 留意定义域为 $n \in \mathbf{N}^+$.

4. 易错点: 数列项数

25 如图所示: 正方形上连接着等腰直角三角形, 等腰直角三角形腰上再连接正方形, ..., 如此继续下去得到一个树形图形, 称为“勾股树”. 若某勾股树含有 1023 个正方形, 且其最大的正方形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则其最小正方形的边长为 ____.



答案 $\frac{1}{32}$

解析 边长成首项为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，公比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的等比数列，
勾股数含有的正方形总数 $S_n = 2^n - 1$ ，
当 $S_n = 1023$ 时， $n = 10$ ，
此时边长为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} = \frac{1}{32}$ 。

【赠言】此题做错不是你不行，是你太膨胀，此题说白了，就是找规律，你大可列出前几项，得到规律，稳中前行。

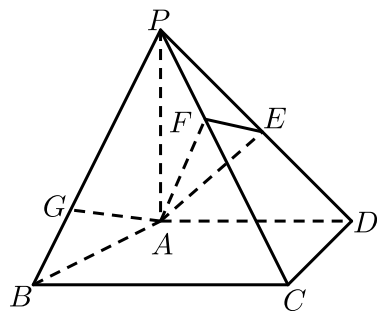
五、立体几何

1. 易错点：立体几何解答题易错点汇总

【立体几何解答题易错点汇总】

- ①几何体的识别，区分名称的区别；
- ②性质定理的应用：线面平行证线线平行，面面垂直推线面垂直；
- ③建系：右手定则，建系前证两两垂直；
- ④建系算点的坐标时，不易看出的可以考虑立体几何平面化处理；
- ⑤求线面角注意法向量与直线的夹角与所求线面角互余或差90度；
- ⑥二面角判断：同进同出互补，一进一出相等；
- ⑦动点问题设 λ 时，注意 λ 取值范围，并考虑是否包含端点。

26 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $PA = AD = CD = 2$ ， $BC = 3$ ， E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$ 。



(1) 求证： $CD \perp$ 平面 PAD 。

(2) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值.

(3) 设点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$, 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内, 说明理由.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) 存在; 理由见解析.

解析

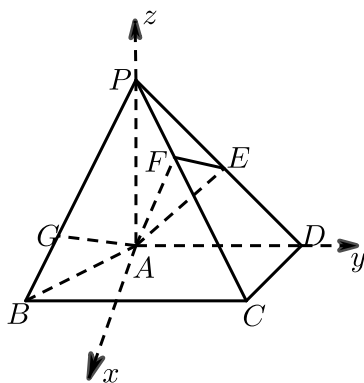
(1) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$ 、 $CD \subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore PA \perp CD$,

$\because AD \perp CD$, $PA \cap AD = A$, $PA \subset$ 平面 PAD , $AD \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD .

(2) 如图所示:



在平面 $ABCD$ 中过点 A 作 $Ax \perp AD$, 又有 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 则以点 A 为坐标原点, Ax , AD , AP 的方向为正方向建立空间直角坐标系, $A-xyz$.

则各点坐标为 $A(0,0,0)$, $D(0,2,0)$, $P(0,0,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(2,2,0)$,

$\because E$ 为 PD 中点,

$\therefore E(0,1,0)$,

$\therefore \overrightarrow{AE} = (0,1,1)$

$\because$ 点 F 在 PC 上且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$,

$\therefore F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

设平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$, 则有 $\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{AF} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{4}{3}c = 0 \end{cases}, \text{ 令 } a = 1 \text{ 则 } b = 1, c = -1.$$

$$\therefore \vec{m} = (1, 1, -1),$$

由(1)可知 $DC \perp$ 平面 PAE ,

$\therefore \overrightarrow{DC}$ 可为平面 PAE 的一个法向量,

$$\overrightarrow{DC} = (2, 0, 0)$$

$$\left| \cos \angle \vec{m}, \overrightarrow{DC} \right| = \frac{\left| \vec{m} \cdot \overrightarrow{DC} \right|}{\left| \vec{m} \right| \left| \overrightarrow{DC} \right|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 由图可知二面角 } F-AE-P \text{ 为锐角,}$$

$\therefore$ 二面角 $F-AE-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) 直线 AG 在平面 AEF 内,

$\because$ 点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore G\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{AG} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} \cdot \vec{m} = 0,$$

$$\therefore AG \perp \vec{m}.$$

$\because$ 点 A 在平面 AEF 内,

$\therefore$ 直线 AG 在平面 AEF 内.

故存在.

六、解析几何

1. 易错点: 圆锥曲线取值范围限制

27 记双曲线 $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 2, 点 M 在 C 上, 点 N 满足 $\overrightarrow{F_1N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F_1M}$, 若 $|MF_1| = 10$, O 为坐标原点, 则 $|ON| = (\quad)$.

A. 8

B. 9

C. 8或2

D. 9或1

答案 B

解析 依题意, $e = \sqrt{1 + \frac{m}{16}} = 2$,

解得 $m = 48$,

因为 $||MF_1| - |MF_2|| = 2a = 8$,

解得 $|MF_2| = 18$ 或 2 ,

而 $|MF_2| \geq c - a = 8 - 4 = 4$,

故 $|MF_2| = 18$,

由 $\overrightarrow{F_1N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F_1M}$ 知, N 是 F_1M 的中点, 而 O 是 F_1F_2 的中点,

故 $|ON| = \frac{1}{2}|MF_2| = 9$.

故选 B.

2. 易错点：解析几何解答题易错点汇总

【解析几何解答题易错点/注意事项汇总】

- ① 过椭圆外一点做直线与圆锥曲线相交时, 需考虑 $\Delta \geq 0$;
- ② 直线设法: 当直线过 x 轴上一定点时, 若问题转化后与 y 有关, 则考虑设直线 $x = my + c$;
- ③ 过 x 轴一定点的直线与抛物线联立, 大部分情况设直线 $x = my + c$ 对简化计算有巨大帮助;
- ④ 设直线 $y = kx + b$ 时, 一般需单独分类讨论 k 不存在 (垂直 x 轴) 的情况; 设直线 $x = my + c$ 时, 需单独考虑 m 不存在 (垂直 y 轴) 的情况;
- ⑤ 遇倾斜直线成比例问题, 转化为横坐标或纵坐标成比例问题处理.

28 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(1, 2)$. 过点 $Q(0, 1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B , 且直线 PA 交 y 轴于 M , 直线 PB 交 y 轴于 N .

(1) 求直线 l 的斜率的取值范围.

(2) 设 O 为原点, $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO}$, 求证: $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值.

答案 (1) $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 1)$.

(2) 证明见解析

解析 (1) 由已知可得 $4 = 2p$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

令 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

直线 l 显然不能与 x 轴垂直, 令其方程为 $y = kx + 1$,

带入 $y^2 = 4x$ 整理得 $y = k \cdot \frac{y^2}{4} + 1$, 即 $ky^2 - 4y + 4 = 0$.

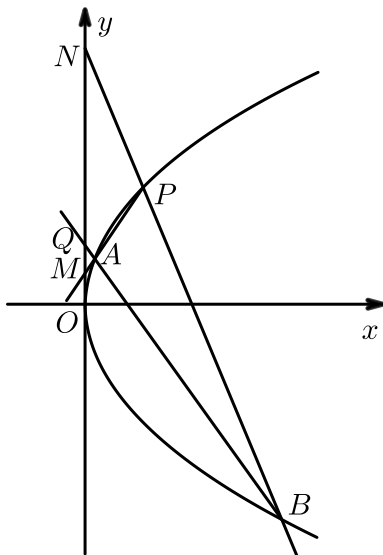
所以由已知可得 $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 16 - 16k > 0 \end{cases}$, 解得 $k < 1$ 且 $k \neq 0$.

又 PA 、 PB 与 y 轴均有交点, 故 l 不经过点 $(1, -2)$,

所以 $-2 \neq k + 1$, 即 $k \neq -3$,

所以直线 l 的斜率 k 的取值范围为 $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 1)$.

(2) 方法一:



由 (1) 知 $y_1 + y_2 = \frac{4}{k}$, $y_1 y_2 = \frac{4}{k}$.

而点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 均在抛物线上, 所以 $x_1 = \frac{y_1^2}{4}$, $x_2 = \frac{y_2^2}{4}$.

因为直线 PA 与直线 PB 与 y 轴相交,

则直线 PA 与直线 PB 的斜率均存在, 即 $y_1 \neq -2$, $y_2 \neq -2$.

因为 $k_{PA} = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 1} = \frac{y_1 - 2}{\frac{y_1^2}{4} - 1} = \frac{4(y_1 - 2)}{y_1^2 - 4} = \frac{4}{y_1 + 2}$,

所以直线 PA 的方程为 $y - 2 = \frac{4}{y_1 + 2}(x - 1)$,

令 $x = 0$, 可得 $y_M = 2 - \frac{4}{y_1 + 2} = \frac{2y_1}{y_1 + 2}$, 即 $M(0, \frac{2y_1}{y_1 + 2})$.

同理可得 $N(0, \frac{2y_2}{y_1 + 2})$.

而由 $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$ 可得, $\frac{2y_1}{y_1 + 2} - 1 = -\lambda$, 所以 $\frac{1}{\lambda} = \frac{2 + y_1}{2 - y_1}$.

同理由 $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO}$ 可得, $\frac{2y_2}{y_2 + 2} - 1 = -\mu$, 所以 $\frac{1}{\mu} = \frac{2 + y_2}{2 - y_2}$.

所以 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{2 + y_1}{2 - y_1} + \frac{2 + y_2}{2 - y_2} = \frac{(2 + y_1)(2 - y_2) + (2 + y_2)(2 - y_1)}{(2 - y_1)(2 - y_2)}$
 $= \frac{8 - 2y_1 y_2}{4 + y_1 y_2 - 2(y_1 + y_2)} = \frac{8 - \frac{8}{k}}{4 + \frac{4}{k} - 2 \times \frac{4}{k}} = \frac{8 - \frac{8}{k}}{4 - \frac{4}{k}} = 2$.

方法二: 因为抛物线 $y^2 = 2px$ 经过点 $P(1, 2)$, 所以 $4 = 2p$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$,

由题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$ ($k \neq 0$) ,

由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = kx + 1 \end{cases}$ 得 $k^2 x^2 + (2k - 4)x + 1 = 0$, 依题意 $\Delta = (2k - 4)^2 - 4 \times k^2 \times 1 > 0$,

解得 $k < 0$ 或 $0 < k < 1$,

又 PA 、 PB 与 y 轴相交, 故直线 l 不经过点 $(1, -2)$, 从而 $k \neq -3$,

所以直线 l 斜率的取值范围是 $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 1)$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由(1)知, $x_1 + x_2 = -\frac{2k-4}{k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{1}{k^2}$,

直线 PA 的方程为 $y - 2 = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 2}(x - 1)$,

令 $x = 0$, 得点 M 的纵坐标为 $y_M = \frac{-y_1 + 2}{x_1 - 1} + 2 = \frac{-kx_1 + 1}{x_1 - 1} + 2$,

同理得点 N 的纵坐标为 $y_N = \frac{-x_2 + 1}{x_2 - 1} + 2$,

由 $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO}$, 得 $\lambda = 1 - y_M$, $\mu = 1 - y_N$,

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{1 - y_M} + \frac{1}{1 - y_N} = \frac{x_1 - 1}{(k - 1)x_1} + \frac{x_2 - 1}{(k - 1)x_2} = \frac{1}{k - 1} \cdot \frac{2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{1}{k - 1} \cdot \frac{\frac{2}{k^2} + \frac{2k - 4}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = 2 \end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值.

七、导数

1. 易错点：导数解答题易错点汇总

【导数解答题易错点/注意事项汇总】

- ① 导函数为类一次的分类讨论看的是零点和单调性；
- ② 清君侧：看到 $x \ln x$, 考虑同除 x , 避免二次求导；
- ③ 助君威：看到 $f(x) + e^x$ 的形式, 可以考虑同除 e^x , 让 e^x 和其他式子进行乘除运算, 方便求导；
- ④ 双变量的恒能成立问题转化, 用主元的思想, 分为两个单变量恒能成立问题讨论；
- ⑤ 参变分离求零点个数问题时, 移项时, 注意讨论除过去的量可能为 0, 需单独讨论此情况.

29 已知函数 $f(x) = x \ln(x + 1) - ax^2$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.

(2) 当 $a < 0$ 时, 求证：函数 $f(x)$ 存在极小值

(3) 请直接写出函数 $f(x)$ 的零点个数.

答案

(1) $y = 0$.

(2) 证明见解析.

(3) 当 $a \leq 0$ 或 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点,

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点.

解析

(1) $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2$ 的定义域为 $\{x | x > -1\}$,

因为 $f(0) = 0 \ln(0+1) - a \cdot 0^2 = 0$,

所以切点的坐标为 $(0, 0)$,

因为 $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$,

$f'(0) = \ln(0+1) + \frac{0}{0+1} - 2a \cdot 0 = 0$,

所以切线的斜率 $k = 0$,

所以切线的方程为 $y = 0$.

故答案为: $y = 0$.

(2) 方法一: 令 $g(x) = f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$,

$g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - 2a$,

因为 $x > -1$ 且 $a < 0$,

所以 $\frac{1}{x+1} > 0$, $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$, $-2a > 0$,

从而得到 $g'(x) > 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $f'(x) > 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增且 $f'(x) = 0$,

所以 x , $f'(x)$, $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 的变化情况如下表:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 问题得证.

方法二: $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$,

当 $a < 0$ 时,

当 $x < 0$ 时, $\ln(x+1) < 0$, $\frac{x}{x+1} < 0$, $-2ax < 0$, 所以 $f'(x) < 0$,

当 $x > 0$ 时, $\ln(x+1) > 0$, $\frac{x}{x+1} > 0$, $-2ax > 0$, 所以 $f'(x) > 0$,

所以 $f'(x)$, $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 的变化情况如下表:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 问题得证.

(3) 当 $a \leq 0$ 或 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点,

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点.