

易错点汇总

一、函数

1. 易错点：忽略定义域

1 方程 $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$ 的解为 _____ .



变式训练

2 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 () .

A. $(-\infty, -2)$

B. $(-\infty, -1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(4, +\infty)$

【谨记】分式、对数、零次幂先处理定义域 .

2. 易错点：二次函数的分类讨论

3 如果函数 $f(x) = \frac{1}{2}(m-2)x^2 + (n-8)x + 1$ ($m \geq 0, n \geq 0$) 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 单调递减, 则 mn 的最大值为 () .

A. 16

B. 18

C. 25

D. $\frac{81}{2}$

3. 易错点：分段函数单调递增充要条件

4 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \geq 1 \\ ax + a - 2, & x < 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 那么实数 a 的取值范围是 () .

A. $(1, +\infty)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, 2)$

D. $(1, 2]$



变式训练

- 5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $(0, \frac{2}{3}]$
 B. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$
 C. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup \{\frac{3}{4}\}$
 D. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{\frac{3}{4}\}$

【通解】分段函数单调递增充要条件：

- ①各段单调递增；
 ②【易忘】分隔点左小右大.

4. 易错点：分段函数零点个数问题

- 6 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1 \end{cases}$.

- ①若 $a = 1$, 则 $f(x)$ 的最小值为 _____ ;
 ②若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

【通解】分段函数零点个数问题：

- ①分别讨论各段零点可能情况；
 ②分类讨论各段分别提供零点个数.

【易错点】极易忽略临界点是否可以取等.

【谨记】求得 a 值时, 考虑临界点时是否可以取等, 建议数形结合.



变式训练

- 7 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0 \end{cases}$. 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则 a 的取值范围是 _____ .

二、概率

1. 易错点：条件概率

- 8 甲、乙二人争夺一场围棋比赛的冠军，若比赛为“三局两胜”制（无平局），甲在每局比赛中获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，且各局比赛结果相互独立，则在甲获得冠军的条件下，比赛进行了三局的概率为（ ）.
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$



变式训练

- 9 已知一种元件的使用寿命超过1年的概率为0.8，超过2年的概率为0.6，若一个这种元件使用到1年时还未失效，则这个元件使用寿命超过2年的概率为（ ）.
- A. 0.75 B. 0.6 C. 0.52 D. 0.48
- 10 从标有1、2、3、4、5的五张卡片中，依次抽出2张，则在第一次抽到奇数的情况下，第二次抽到偶数的概率为（ ）.
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

2. 易错点：状态问题

- 11 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）. 根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为0.6，客场取胜的概率为0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以4:1获胜的概率是 _____.



变式训练

- 12 甲、乙两人进行羽毛球比赛，比赛采取五局三胜制，约定无论哪一方先胜三局则比赛结束，假定甲每局比赛获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，则乙以3:1的比分获胜的概率为（ ）.
- A. $\frac{8}{27}$ B. $\frac{2}{27}$ C. $\frac{32}{81}$ D. $\frac{64}{81}$

3. 易错点：概率解答题易错点汇总

【概率解答题易错点汇总】

①区分二项分布和超几何分布：有放回为二项分布，不放回为超几何分布，可以理解为二项分布是在做重复的事情，超几何分布是一锤定音。

三、三角

1. 易错点：平移变换只针对 x

13 已知曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 则下面结论正确的是()。

- A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的2倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
- B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的2倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
- C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
- D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2



变式训练

14 函数 $f(x)$ 的图象向右平移1个单位长度, 所得图象与曲线 $y = e^x$ 关于 y 轴对称, 则 $f(x) = ()$ 。

- A. e^{x+1}
- B. e^{x-1}
- C. e^{-x+1}
- D. e^{-x-1}

15 若将函数 $y = 2 \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 则平移后图象的对称轴为()。

- A. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$
- B. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$
- C. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$

D. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$

2. 易错点：图象变换逆应用

16 由 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，再把所得图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍得到

$y = \sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right)$ 的图象，则 $f(x) = (\quad)$.

A. $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{6}\pi\right)$

B. $\sin\left(6x - \frac{1}{6}\pi\right)$

C. $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\pi\right)$

D. $\sin\left(6x + \frac{1}{3}\pi\right)$



变式训练

17 要得到函数 $y = \sqrt{2} \cos x$ 的图象，只需将函数 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有的点 $(\quad)$.

A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

D. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

【注意】 图象变换明确原函数 .

3. 易错点：三角函数 ω 取值范围问题

18 已知函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ 的图象在区间 $[0, 1]$ 上恰有3个最高点，则 ω 的取值范围为

$(\quad)$.

A. $\left[\frac{19\pi}{4}, \frac{27\pi}{4}\right)$

B. $\left[\frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right)$

C. $\left[\frac{17\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}\right)$

D. $[4\pi, 6\pi)$



变式训练

19 函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象在 $[0, 1]$ 上恰有两个最大值点, 则 ω 的取值范围为 ().

- A. $[2\pi, 4\pi]$
- B. $\left[2\pi, \frac{9\pi}{2}\right)$
- C. $\left[\frac{13\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}\right)$
- D. $\left[2\pi, \frac{25\pi}{6}\right)$

4. 易错点：三角解答题易错点汇总

【三角解答题易错点汇总】

- ①求三角函数性质问题中, 注意补上 $k \in \mathbf{Z}$;
- ②解三角形问题中, 留意题目中给的三角形是否限制了锐角或者钝角;
- ③解三角形问题中, 当求得一角的正弦值时, 需考虑是否要分类讨论此角度为钝角还是锐角;
- ④锐角三角形中, 已知 $A + B = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\sin B - \sqrt{3} \cos A$ 取值范围时, 转单变量解题时, **需注意角度的取值范围** (A, B 均为锐角) .

四、数列

1. 易错点：数列单调性问题

20 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 则“ $d > 0$ ”是“ $\{S_n\}$ 为递增数列”的 ().

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【谨记】等差数列的前 n 项和 S_n 是递增数列的的充要条件是：

- ① $d = 0, a_1 > 0$;
- ② $d > 0, a_2 > 0$.



变式训练

21 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“ $S_n < na_n$ 对 $n \geq 2$ 恒成立”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的（ ）。

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 易错点：已知 S_n 求 a_n

22 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 1$ ，则 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = (\quad)$ 。

- A. 40 B. 44 C. 45 D. 49

【注意】已知 S_n 求 a_n ，构造 S_{n-1} 作差求 a_n ，所求 a_n 满足 $n \geq 2$ ，需单独验证 a_1 。

3. 易错点：数列最值问题

23 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = 2$ ，对任意 $p, q \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_{p+q} = a_p + a_q$ ，则

$f(n) = \frac{S_n + 60}{n + 1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的最小值为 _____。



变式训练

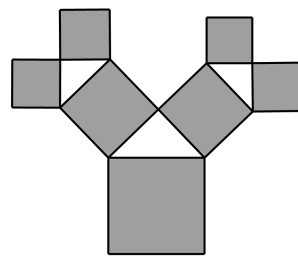
24 函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x - 3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$ ，若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n) (n \in \mathbf{N}_+)$ ，且 $\{a_n\}$ 是递增数列，则实数 a 的取值范围是（ ）。

- A. $\left[\frac{9}{4}, 3\right)$ B. $\left(\frac{9}{4}, 3\right)$ C. $(2, 3)$ D. $(1, 3)$

【谨记】当数列与函数综合考查时，留意定义域为 $n \in \mathbf{N}^+$ 。

4. 易错点：数列项数

25 如图所示：正方形上连接着等腰直角三角形，等腰直角三角形腰上再连接正方形，...，如此继续下去得到一个树形图形，称为“勾股树”。若某勾股树含有1023个正方形，且其最大的正方形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则其最小正方形的边长为 _____。



【赠言】此题做错不是你不行，是你太膨胀，此题说白了，就是找规律，你大可列出前几项，得到规律，稳中前行。

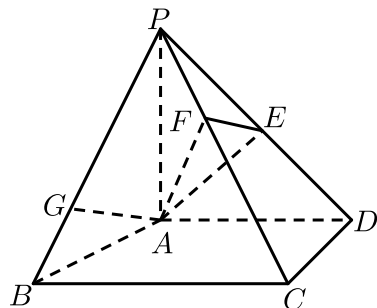
五、立体几何

1. 易错点：立体几何解答题易错点汇总

【立体几何解答题易错点汇总】

- ①几何体的识别，区分名称的区别；
- ②性质定理的应用：线面平行证线线平行，面面垂直推线面垂直；
- ③建系：右手定则，建系前证两两垂直；
- ④建系算点的坐标时，不易看出的可以考虑立体几何平面化处理；
- ⑤求线面角注意法向量与直线的夹角与所求线面角互余或差90度；
- ⑥二面角判断：同进同出互补，一进一出相等；
- ⑦动点问题设 λ 时，注意 λ 取值范围，并考虑是否包含端点。

- 26 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $PA = AD = CD = 2$ ， $BC = 3$ ， E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$ 。



- (1) 求证： $CD \perp$ 平面 PAD 。
- (2) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值。

(3) 设点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$, 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内, 说明理由.

六、解析几何

1. 易错点：圆锥曲线取值范围限制

27 记双曲线 $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 2, 点 M 在 C 上, 点 N 满足 $\overrightarrow{F_1N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F_1M}$, 若 $|MF_1| = 10$, O 为坐标原点, 则 $|ON| = (\quad)$.

A. 8

B. 9

C. 8 或 2

D. 9 或 1

2. 易错点：解析几何解答题易错点汇总

【解析几何解答题易错点/注意事项汇总】

- ① 过椭圆外一点做直线与圆锥曲线相交时, 需考虑 $\Delta \geq 0$;
- ② 直线设法: 当直线过 x 轴上一定点时, 若问题转化后与 y 有关, 则考虑设直线 $x = my + c$;
- ③ 过 x 轴一定点的直线与抛物线联立, 大部分情况设直线 $x = my + c$ 对简化计算有巨大帮助;
- ④ 设直线 $y = kx + b$ 时, 一般需单独分类讨论 k 不存在 (垂直 x 轴) 的情况; 设直线 $x = my + c$ 时, 需单独考虑 m 不存在 (垂直 y 轴) 的情况;
- ⑤ 遇倾斜直线成比例问题, 转化为横坐标或纵坐标成比例问题处理.

28 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(1, 2)$. 过点 $Q(0, 1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B , 且直线 PA 交 y 轴于 M , 直线 PB 交 y 轴于 N .

(1) 求直线 l 的斜率的取值范围.

(2) 设 O 为原点, $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO}$, 求证: $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值.

七、导数

1. 易错点：导数解答题易错点汇总

【导数解答题易错点/注意事项汇总】

- ①导函数为类一次的分类讨论看的是零点和单调性；
- ②清君侧：看到 $x \ln x$ ，考虑同除 x ，避免二次求导；
- ③助君威：看到 $f(x) + e^x$ 的形式，可以考虑同除 e^x ，让 e^x 和其他式子进行乘除运算，方便求导；
- ④双变量的恒能成立问题转化，用主元的思想，分为两个单变量恒能成立问题讨论；
- ⑤参变分离求零点个数问题时，移项时，注意讨论除过去的量可能为0，需单独讨论此情况。

29 已知函数 $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.
- (2) 当 $a < 0$ 时，求证：函数 $f(x)$ 存在极小值
- (3) 请直接写出函数 $f(x)$ 的零点个数.