

## 圆锥曲线（小题）

### 一、圆锥曲线

#### 直线和圆

1 直线  $x - y + 3 = 0$  被圆  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$  截得的弦长为 \_\_\_\_\_ .

**答案**  $\sqrt{6}$

**解析** 圆心  $(-2, 2)$  到直线的距离  $d = \frac{|-2 - 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ,  
则弦长为  $2 \cdot \sqrt{2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{6}$  .

2 已知直线  $y = mx$  与圆  $C: (x - m)^2 + (y - 1)^2 = m^2 - 1$  交于  $A, B$  两点,  $\angle ACB = 60^\circ$ , 则圆的面积为 \_\_\_\_\_ .

**答案**  $6\pi$

**解析** 根据题意, 圆  $C: (x - m)^2 + (y - 1)^2 = m^2 - 1$ , 则其圆心为  $(m, 1)$ , 半径为  $\sqrt{m^2 - 1}$ ,  
直线  $y = mx$  与圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 且  $\angle ACB = 60^\circ$ ,  
则  $\triangle ABC$  为等边三角形, 则圆心到直线  $y = mx$  的距离  $d = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ ,  
即  $\frac{|m^2 - 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{m^2 - 1}$ ,  
解可得:  $m^2 = 7$ ,  
则圆的半径  $r = \sqrt{m^2 - 1} = \sqrt{6}$ ,  
则圆的面积  $S = \pi r^2 = 6\pi$  .

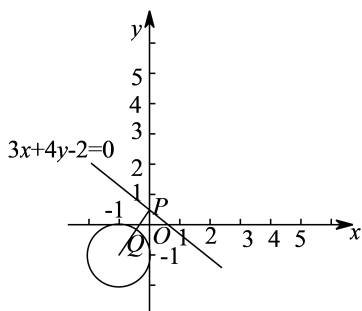
3 已知点  $P$  是直线  $3x + 4y - 2 = 0$  上的点, 点  $Q$  是圆  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$  上的点, 则  $|PQ|$  的最小值是 \_\_\_\_\_ .

答案  $\frac{4}{5}$

解析 圆心 $(-1, -1)$ 到点 $P$ 的距离的最小值为点 $(-1, -1)$ 到直线的距离：

$$d = \frac{|-3 - 4 - 2|}{5} = \frac{9}{5},$$

故点 $Q$ 到点 $P$ 的距离的最小值为 $d - 1 = \frac{4}{5}$  . 如图：



故答案为： $\frac{4}{5}$  .

4 直线 $l: x + y + m = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 相交于 $A$ 、 $B$ 两点，若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，则 $m =$ \_\_\_\_\_ .

答案 1或-3

解析 圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ ，圆心坐标为： $(2, -1)$ ，半径为2，

因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$$\text{所以 } \frac{|2 - 1 + m|}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } m = 1 \text{ 或 } -3 .$$

故答案为：1或-3 .

5 已知圆 $C$ 的圆心在第四象限，直线 $y = -2x$ 过圆心，且点 $(2, 1)$ 在圆 $C$ 上，直线 $x - 2y = 0$ 与圆 $C$ 交于 $A$ 、 $B$ 两点，若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，则圆 $C$ 的方程为\_\_\_\_\_ .

答案  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$

解析 由题意知： $\triangle ABC$ 是以 $\angle C$ 为直角的等腰直角三角形，点 $C$ 在 $y = -2x$ 上，

设 $C(a, -2a)$   $A(2, 1)$

由几何性质  $\angle AOC = 90^\circ$  ,  $AO = CO = \sqrt{5}$  ,

$\therefore a = 1$  那  $C = (1, -2)$

$$r = |AC| = \sqrt{1^2 + 9} = \sqrt{10} ,$$

$$\text{故 } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10 .$$

- 6 已知圆  $C$  的圆心在  $x$  轴正半轴上 , 点  $M(0, 2\sqrt{2})$  在圆  $C$  上 , 且圆心到直线  $2x - y + 1 = 0$  的距离为  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$  , 则圆  $C$  的方程为 \_\_\_\_\_ .

**答案**  $(x-1)^2 + y^2 = 9$

**解析** 可设  $\odot C : (x-a)^2 + y^2 = r^2$  ( $a > 0, r > 0$ ) .

$(a, 0)$  到  $2x - y + 1 = 0$  的距离为 :

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{2a + 1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5} .$$

$$\therefore a = 1 .$$

又  $\because M(0, 2\sqrt{2})$  在  $\odot C$  上 .

$$\therefore 1 + 8 = r^2 \rightarrow r = 3 .$$

$$\therefore \odot C : (x-1)^2 + y^2 = 9 .$$

- 7 已知直线  $l$  的方程为  $x + y - 6 = 0$  ,  $M$  为圆  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  上的任意一点 .  $Q$  点  $M$  到直线  $l$  的距离为  $d$  , 则  $d$  的最大值为 \_\_\_\_\_ .

**答案**  $2\sqrt{2} + 1$

**解析** 圆 :  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  .

圆心  $(2, 0)$  ,  $r = 1$  .

$$\text{圆心到直线距离 } m = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} .$$

$$d_{\max} = m + r = 2\sqrt{2} + 1 .$$

故答案为 :  $2\sqrt{2} + 1$  .

8 垂直于直线  $y = x + 1$  且与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切于第一象限的直线方程是 \_\_\_\_\_ .

**答案**  $y = -x + \sqrt{2}$

**解析** 与  $y = x + 1$  垂直直线设为  $y = -x + b$  ,

由圆心  $(0, 0)$  到  $y = -x + b$  距离为 :

$$\text{半径} 1 = \frac{|b|}{\sqrt{2}} ,$$

$$\text{故 } b = \pm\sqrt{2} ,$$

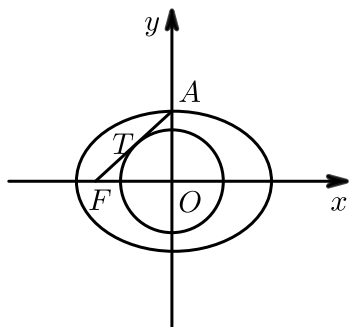
因相切于第一象限 ,

$$\therefore y = -x + \sqrt{2} .$$

9 已知点  $A$ 、 $F$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上顶点和左焦点, 若  $AF$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  相切于点  $T$ , 且点  $T$  是线段  $AF$  靠近点  $A$  的三等分点, 则椭圆  $C$  的标准方程为 \_\_\_\_\_ .

**答案**  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{6} = 1$

**解析** 如图所示, 设  $|AT| = m$  ,  $|FT| = 2m$  , 即  $|AF| = 3m$  .



由  $\triangle AOT \sim \triangle OFT$  , 可得:  $|OT|^2 = |TF| |AT|$  ,

$$\therefore 4 = 2m^2 , \text{解得 } m = \sqrt{2} .$$

$$\text{又 } |OT| = 2 , \therefore b^2 = 2 + 2^2 = 6 , c^2 = 9m^2 - b^2 = 12 .$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 = 18 .$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{6} = 1 .$$

$$\text{故答案为: } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{6} = 1 .$$



10 圆  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$  的圆心到直线  $ax + y - 1 = 0$  的距离为 1, 则  $a = ( )$ .

A.  $-\frac{4}{3}$

B.  $-\frac{3}{4}$

C.  $\sqrt{3}$

D. 2

答案 A

解析 方法一: 将圆方程化为标准方程  $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$ , 解得圆心为  $(1, 4)$ , 半径为  $r = 2$ ,

$$\text{圆心到直线的距离为 } d = \frac{|a+4-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|a+3|}{\sqrt{a^2+1}} = 1, \text{ 解得 } a = -\frac{4}{3}.$$

方法二: 由  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$  配方得  $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$ ,

所以圆心为  $(1, 4)$ , 半径  $r = 2$ ,

因为圆  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$  的圆心到直线  $ax + y - 1 = 0$  的距离为 1,

$$\text{所以 } \frac{|a+4-1|}{\sqrt{a^2+1^2}} = 1, \text{ 解得 } a = -\frac{4}{3}.$$

故选 A.

11 已知过点  $A(-2, m)$  和  $B(m, 4)$  的直线与直线  $2x + y - 1 = 0$  平行, 则  $m$  的值为  $( )$ .

A. 0

B. -8

C. 2

D. 10

答案 B

解析  $\because$  直线  $2x + y - 1 = 0$  的斜率等于  $-2$ ,

$\therefore$  过点  $A(-2, m)$  和  $B(m, 4)$  的直线的斜率  $K$  也是  $-2$ ,

$$\therefore \frac{4-m}{m+2} = -2, \text{ 解得 } k = \frac{4-m}{m+2} = -2, m = -8,$$

故选 B.

12 已知直线  $l$  过点  $(-2, 0)$ , 当直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = 2x$  有两个交点时, 其斜率  $k$  的取值范围是  $( )$ .

A.  $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

B.  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

C.  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

D.  $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$

答案 C

解析  $d = \frac{|k+2k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1,$

$$|k + 2k| < \sqrt{k^2 + 1},$$

$$9k^2 < k^2 + 1,$$

$$8k^2 < 1,$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{4} < k < \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

故选C.

### 双曲线抛物线

- 13 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的焦点与抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点  $F$  重合，抛物线的准线与双曲线交于  $A, B$  两点，且  $\triangle OAB$  的面积为 6，（ $O$  为原点），则双曲线的方程为（ ）.

A.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$       B.  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{32} = 1$       C.  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$       D.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 D

解析 由题意知  $F(2, 0)$ ，准线  $x = -2$ ，

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OF \cdot (AB) = 6,$$

则  $A(-2, 3)$ ，

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases},$$

$$\therefore a^2 = 1, b^2 = 3,$$

故选：D.

- 14 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ . 若双曲线  $C$  上存在一点  $P$ ，使得  $\triangle PF_1F_2$  为等腰三角形，且  $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{7}{8}$ ，则双曲线的离心率为（ ）.

A.  $\frac{4}{3}$       B.  $\frac{3}{2}$       C.  $\frac{3}{2}$  或 3      D.  $\frac{4}{3}$  或 2

答案 D

解析  $\because \triangle PF_1F_2$  是等腰三角形，

$$\therefore PF_1 = F_1F_2 \text{ 或 } PF_2 = F_1F_2.$$

①当  $PF_2 = F_1F_2 = 2c$  时,

$$PF_1 = PF_2 + 2a = 2a + 2c,$$

$$\therefore \cos \angle PF_1F_2 = \frac{7}{8} = \frac{PF_1^2 + F_1F_2^2 - PF_2^2}{2 \cdot PF_1 \cdot F_1F_2},$$

$$\text{即 } 3e^2 - e - 4 = 0,$$

$$\text{得 } e = \frac{4}{3};$$

②当  $PF_1 = F_1F_2 = 2c$  时,

$$PF_2 = PF_1 - 2a = 2c - 2a,$$

$$\therefore \cos \angle PF_1F_2 = \frac{7}{8} = \frac{PF_1^2 + F_1F_2^2 - PF_2^2}{2 \cdot PF_1 \cdot F_1F_2},$$

$$\text{即 } 3e^2 - 8e + 4 = 0,$$

$$\text{得 } e = 2;$$

综上,  $e = \frac{4}{3}$  或  $2$ .

15

已知  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 过点  $F_2$  与双曲线的一条渐近线平行的直线交双曲线另一条渐近线于点  $M$ , 若点  $M$  在以线段  $F_1F_2$  为直径的圆外, 则双曲线离心率的取值范围是 ( ).

A.  $(1, \sqrt{2})$

B.  $(\sqrt{3}, +\infty)$

C.  $(\sqrt{3}, 2)$

D.  $(2, +\infty)$

答案

D

解析

双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ,

不妨设过点  $F_2$  与双曲线的一条渐近线平行的直线方程为  $y = \frac{b}{a}(x - c)$ ,

与  $y = -\frac{b}{a}x$  联立, 可得交点  $M\left(\frac{c}{2}, -\frac{bc}{2a}\right)$ ,

$\therefore$  点  $M$  在以线段  $F_1F_2$  为直径的圆外,

$$\therefore |OM| > |OF_2|, \text{ 即有 } \frac{c^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4a^2} > c^2,$$

$$\therefore b^2 > 3a^2,$$

$$\therefore c^2 - a^2 > 3a^2,$$

$$\text{即 } c > 2a,$$

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} > 2,$$

$\therefore$  双曲线离心率的取值范围是  $(2, +\infty)$ .

- 16 已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  有相同的焦点  $F$ ，点  $A$  是两曲线的一个交点，若直线  $AF$  的斜率为  $\sqrt{3}$ ，则双曲线的离心率为 ( ) .

- A.  $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{7}+3}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{7}+4}{3}$

答案 B

解析 抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  有相同的焦点  $F$ ，

可设  $c = \frac{p}{2}$ ，即有抛物线方程为  $y = 4cx$ ，

设  $A(m, n)$ ，且  $m > 0, n > 0$ ，

由  $AF$  的斜率为  $\sqrt{3}$ ，可得  $\frac{n}{m-c} = \sqrt{3}$ ， $n^2 = 4mc$ ，

解得  $m = 3c$ ， $n^2 = 12c^2$ ，

代入双曲线方程可得  $\frac{9c^2}{a^2} - \frac{12c^2}{b^2} = 1$ ，

由  $e = \frac{c}{a}$ ，即  $9e^2 - \frac{12e^2}{e^2-1} = 1$ ，

即  $9e^4 - 22e^2 + 1 = 0$ ，

可得  $e^2 = \frac{11+4\sqrt{7}}{9}$ ，

解得  $e = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$ ，

故选 B.

- 17 设  $e_1, e_2$ ，分别为具有公共焦点  $F_1, F_2$  的椭圆和双曲线的离心率， $P$  为两曲线的一个公共点，且满足  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ ，则  $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2}$  的值为 ( ) .

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$       C. 2      D. 不确定

答案 C

解析 因为  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ ，

所以  $PF_1 \perp PF_2$ ，

设椭圆的长半轴是  $a_1$ ，双曲线的实半轴是  $a_2$ ，半焦距是  $c$ ， $PF_1 = m$ ， $PF_2 = n$ ， $m > n$ ，

根据椭圆和双曲线的定义可得： $m + n = 2a_1$ ， $m - n = 2a_2$ ，

解得： $(a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 = (2c)^2$ ，

化简得： $a_1^2 + a_2^2 = 2c^2$ ，

$\therefore \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 2$ 。

故选：C。

- 18 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点为  $F_1$ ， $P$  为左支上一点， $|PF_1| = a$ ， $P_0$  与  $P$  关于原点对称，且  $\overrightarrow{P_0F_1} \cdot \overrightarrow{PF_1} = 0$ 。则双曲线的渐近线方程为（ ）。

- A.  $y = \pm x$       B.  $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$       C.  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$       D.  $y = \pm 2x$

答案 B

解析 设双曲线的右焦点为  $F_2$ ，

则由对称性知， $|P_0F_2| = |PF_1| = a$ ，

则  $|P_0F_1| - |P_0F_2| = 2a$ ，

即  $|P_0F_1| = 3a$ ，

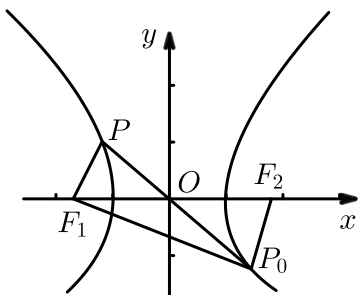
$\because \overrightarrow{P_0F_1} \cdot \overrightarrow{PF_1} = 0$ ， $\therefore P_0F_1 \perp PF_1$ ，即  $P_0F_1 \perp P_0F_2$ ，

则  $4c^2 = (3a)^2 + a^2 = 10a^2 = 4(a^2 + b^2)$ ，

即  $3a^2 = 2b^2$ ，

则  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{2}$ ，即  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

即双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$ ，



故选B。

- 19 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两条渐近线分别为  $l_1, l_2$ ，若  $E$  的一个焦点  $F$  关于  $l_1$  的对称点  $F'$  在  $l_2$  上，则  $E$  的离心率为（ ）。

- A.  $\sqrt{5}$       B. 2      C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

答案 B

解析

$l_1, l_2$  分别为双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两条渐近线,

不妨设  $l_1$  为  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $l_2$  为  $y = -\frac{b}{a}x$ ,

若右焦点  $F$  关于  $l_1$  的对称点  $l_2$  在上,

设右焦点  $F$  关于  $l_1$  的对称点为  $F'(m, -\frac{b}{a}m)$ ,

右焦点  $F$  坐标为  $(c, 0)$ ,

$F'F$  中点坐标为  $(\frac{m+c}{2}, -\frac{bm}{2a})$ ,

可得  $-\frac{bm}{2a} = \frac{m+c}{2} \cdot \frac{b}{a}$ ,

解得  $m = -\frac{1}{2}c$ ,

即有  $F'(-\frac{1}{2}c, \frac{bc}{2a})$ ,

可得  $F'F$  的斜率为  $-\frac{\frac{bc}{2a}}{-\frac{1}{2}c - c} = -\frac{b}{3a}$ ,

即有  $-\frac{b}{3a} \cdot \frac{b}{a} = -1$ ,

可得  $b^2 = 3a^2$ ,

即  $c^2 = a^2 + b^2 = 4a^2$ ,

则  $c = 2a$ ,

可得  $e = \frac{c}{a} = 2$ .

故选 B.

20 已知  $F$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点. 过点  $F$  向  $C$  的一条渐近线引垂线. 垂足为

A. 交另一条渐近线于点  $B$ . 若  $|OF| = |FB|$ , 则  $C$  的离心率是( ).

A.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

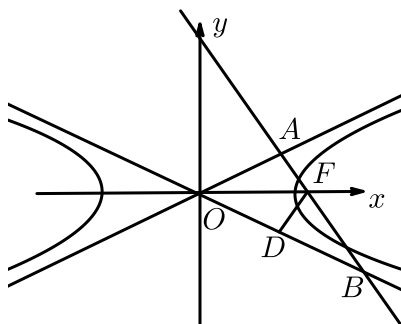
C.  $\sqrt{2}$

D. 2

答案 B

解析

方法一: 过  $F$  向另一条渐近线引垂线. 垂足为  $D$ ,



双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，则  $F(c, 0)$  到渐近线的距离  $d = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ ，

即  $|FA| = |FD| = b$ ，则  $|OA| = |OD| = a$ ， $|AB| = b + c$ ，

由  $\triangle OFB$  为等腰三角形，

则  $D$  为  $OB$  的中点，

$$\therefore |OB| = 2a, |OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 = a^2 + (b + c)^2.$$

$$\therefore 4a^2 = a^2 + (b + c)^2, \text{ 整理得: } c^2 - bc - 2b^2 = 0,$$

解得： $c = 2b$ ，

$$\text{由 } a^2 = c^2 - b^2, \text{ 则 } 2a = \sqrt{3}c, e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故选 B.

方法二：过  $F$  向另一条渐近线引垂线，垂足为  $D$ ，

双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

则  $F(c, 0)$  到渐近线的距离  $d = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ ，即  $|FA| = |FD| = b$ ，

则  $|OA| = |OD| = a$ ，由  $\triangle OFB$  为等腰三角形，则  $D$  为  $OB$  的中点，

$$\therefore |OB| = 2a,$$

$$\text{由 } \angle OFB = \pi - \angle OFA, \cos \angle OFB = \cos(\pi - \angle OFA) = -\cos \angle OFA = -\frac{b}{c},$$

$$\text{由余弦定理可知: } |OB|^2 = |OF|^2 + |FB|^2 - 2|OF||FB|\cos \angle OFB = 2c^2 + 2bc,$$

$$\therefore 2c^2 + 2bc = 4a^2, \text{ 整理得: } c^2 - bc - 2b^2 = 0,$$

解得： $c = 2b$ ，由  $a^2 = c^2 - b^2$ ，

$$\text{则 } 2a = \sqrt{3}c, e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故选 B.

方法三：过  $F$  向另一条渐近线引垂线，垂足为  $D$ ，

双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，则  $F(c, 0)$  到渐近线的距离  $d = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ ，

即  $|FA| = |FD| = b$ ，则  $|OA| = |OD| = a$ ，由  $\triangle OFB$  为等腰三角形，

则  $D$  为  $OB$  的中点，

$\therefore |OB| = 2a$  , 根据三角形的面积相等, 则  $A\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$  ,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle OAB$  中,  $2a = 2 \times 2 \times \frac{ab}{c}$  , 即  $c = 2b$  , 由  $a^2 = c^2 - b^2$  ,

则  $2a = \sqrt{3}c$  ,  $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

故选B .

方法四: 双曲线的一条渐近线方程为  $y = \frac{b}{a}x$  ,

直线  $AB$  的方程为:  $y = -\frac{a}{b}(x-2)$  ,

$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = \frac{a}{b}(x-c) \end{cases}$  , 解得:  $\begin{cases} x = \frac{a^2}{c} \\ y = \frac{ab}{c} \end{cases}$  ,

则  $A\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$  ,  $\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = \frac{a}{b}(x-c) \end{cases}$  , 解得:  $\begin{cases} x = \frac{a^2c}{a^2-b^2} \\ y = \frac{abc}{a^2-b^2} \end{cases}$  ,

则  $B\left(\frac{a^2c}{a^2-b^2}, \frac{abc}{a^2-b^2}\right)$  ,

由  $\triangle OFB$  为等腰三角形, 则  $D$  为  $OB$  的中点, 则  $2 \times \frac{ab}{2} = \frac{abc}{a^2-b^2}$  ,

整理得:  $a^2 = 3b^2$  ,

$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  .

故选B .

21 已知抛物线  $x^2 = -4by$  的准线与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右支分别交于  $B$ 、 $C$  两点,  $A$  为双曲线的右顶点,  $O$  为坐标原点, 若  $\angle BOC = 2\angle AOC$  , 则双曲线的渐近线方程为 ( ) .

A.  $y = \pm 2\sqrt{2}x$

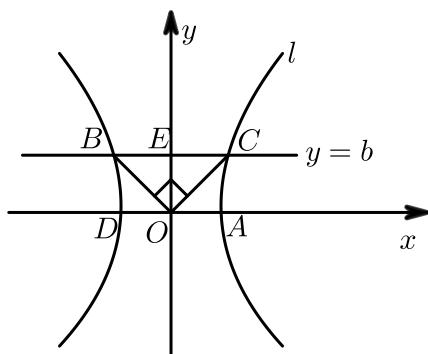
B.  $y = \pm 2x$

C.  $y = \pm \sqrt{2}x$

D.  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

答案 C

解析  $x^2 = -4by$  的准线为  $y = b$  .



$\therefore \angle DOB = \angle AOC = \frac{1}{2}\angle BOC$  .



$$\angle DOB + \angle AOC + \angle BOC = 180^\circ .$$

$$\therefore \angle AOC = 45^\circ .$$

$$y_c = b \text{ 时, 可得 } x_c = \sqrt{2}a (x_c > 0) .$$

$$\therefore c(\sqrt{2}a, b) .$$

$$\tan \angle AOC = \frac{1}{1} = \frac{b}{\sqrt{2}a} .$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{2} .$$

$$\therefore \text{渐近线方程为 } y = \pm \sqrt{2}x .$$

故选C .

- 22 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  , ( $a > 0, b > 0$ ) , 其中, 双曲线半焦距为  $c$  , 若抛物线  $y^2 = 4cx$  的准线被双曲线  $C$  截得的弦长为  $\frac{2}{3}ae^2$  ( $e$  为双曲线  $C$  的离心率) , 则双曲线  $C$  的渐近线方程为 ( ) .

A.  $y = \pm \frac{1}{2}x$

B.  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

C.  $y = \pm \frac{3}{2}x$

D.  $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$

答案 B

解析  $\therefore$  双曲线被抛物线准线截得弦长为  $\frac{2}{3}ae^2$  .

$$\therefore \text{通径为 } \frac{2}{3}ae^2 .$$

$$\therefore \frac{2b^2}{a} = \frac{2}{3}ae^2, 3c^2 - 3a^2 = a^2e^2 .$$

$$2e^2 = 3, e = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{c}{a}, c = \frac{\sqrt{6}}{2}a .$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = \frac{a^2}{2} .$$

$$\therefore \text{渐近线方程 } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x .$$

故选B .

- 23 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$  , 点  $M, N$  在双曲线上, 且  $MN \parallel F_1F_2$  ,  $|MN| = \frac{1}{2}|F_1F_2|$  , 线段  $F_1N$  交双曲线  $C$  于  $Q$  ,  $|F_1Q| = \frac{2}{5}|F_1N|$  , 则该双曲线的离心率是 ( ) .

A.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

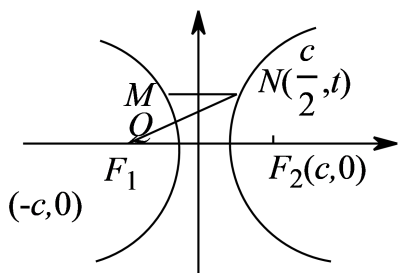
B.  $\frac{5}{2}$

C. 2

D.  $\sqrt{7}$

答案 D

解析 如图,



设  $N\left(\frac{c}{2}, t\right)$ .

$$\therefore |F_1Q| = \frac{2}{5}|F_1N|.$$

$$\therefore \text{设 } Q\left(-\frac{2}{5}c, \frac{2}{5}t\right).$$

又  $\because Q, N$  均在双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  上.

$$\therefore \begin{cases} \frac{\frac{4}{25}c^2}{a^2} - \frac{\frac{4}{25}t^2}{b^2} = 1 \\ \frac{\frac{1}{4}c^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1 \end{cases}.$$

$$\therefore \left(\frac{4}{25} \frac{c^2}{a^2} - 1\right) b^2 \times \frac{25}{4} = \left(\frac{c^2}{4a^2} - 1\right) b^2.$$

$$e^2 - \frac{25}{4} = \frac{1}{4}e^2 - 1$$

$$\frac{3}{4}e^2 = \frac{21}{4}$$

$$e = \sqrt{7}.$$

故选 D.

24 设  $P$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  上一点,  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C$  的左、右焦点,  $PF_2 \perp F_1F_2$ , 若  $\triangle PF_1F_2$  的外接圆半径是其内切圆半径的  $\frac{17}{6}$  倍, 则双曲线  $C$  的离心率为 ( ).

A. 2

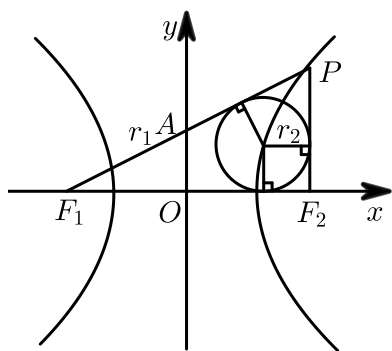
B. 4

C. 2或3

D. 4或  $\frac{5}{3}$

答案 D

解析 如图,



设 $\triangle PF_1F_2$ 外接圆半径为 $r_1$ ，可知外接圆圆心在 $A$ 点，

$$r_1 = \frac{1}{2}|PF_1|, \because |PF_2| = \frac{b^2}{a}, |PF_1| = |PF_2| + 2a = \frac{a^2 + c^2}{a},$$

$$\therefore r_1 = \frac{a^2 + c^2}{2a}.$$

设 $\triangle PF_1F_2$ 内接圆半径为 $r_2$ ，

$$\therefore r_2 = \frac{1}{2}(|F_1F_2| + |PF_2| - |PF_1|) = \frac{1}{2}(2c - 2a) = c - a,$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{a^2 + c^2}{2a}}{c - a} = \frac{17}{6},$$

$$\therefore 40a^2 - 34ac + 6c^2 = 0,$$

$$\therefore 3e^2 - 17e + 20 = 0,$$

$$\therefore e = 4 \text{ 或 } \frac{5}{3}.$$

故选D.

- 25 已知 $F_1, F_2$ 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点和右焦点，过 $F_2$ 的直线 $l$ 与双曲线的右支交于 $A, B$ 两点， $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径为 $r_1$ ， $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆半径为 $r_2$ ，若 $r_1 = 2r_2$ ，则直线 $l$ 的斜率为（ ）

A. 1

B.  $\sqrt{2}$

C. 2

D.  $2\sqrt{2}$

答案 D

解析 设 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆圆心为 $I_1$ ， $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆圆心为 $I_2$ ，

边 $AF_1, AF_2, F_1F_2$ 上的切点分别为 $M, N, E$ ，

易见 $I_1, E$ 横坐标相等，则 $|AM| = |AN|, |F_1M| = |F_1E|, |F_2N| = |F_2E|$ ，

由 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$ ，

即 $|AM| + |MF_1| - (|AN| + |NF_2|) = 2a$ ，

得 $|MF_1| - |NF_2| = 2a$ ，

即  $|F_1E| - |F_2E| = 2a$ ,

记  $l_1$  的横坐标为  $x_0$ , 则  $E(x_0, 0)$ ,

于是  $x_0 + c - (c - x_0) = 2a$ , 得  $x_0 = a$ ,

同理内心  $I_2$  的横坐标也为  $a$ , 则有  $l_1 l_2 \perp x$  轴,

设直线的倾斜角为  $\theta$ , 则  $\angle OF_2 I_2 = \frac{\theta}{2}$ ,  $\angle I_1 F_2 O = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ , 则:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{r_2}{F_2 E}, \tan \angle I_1 F_2 O = \tan \left( 90^\circ - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{r_1}{F_2 E},$$

$\therefore r_1 = 2r_2$ ,

$\therefore \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}, \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$\therefore \tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = 2\sqrt{2}$ .

故选 D.

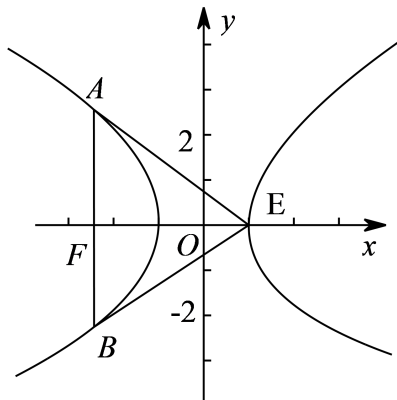
- 26 已知  $F$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点,  $E$  是该双曲线的右顶点, 过点  $F$  且垂直于  $x$  轴的直线与双曲线交于  $A, B$  两点, 若  $\triangle ABE$  是锐角三角形, 则该双曲线的离心率  $e$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

答案 (1, 2)

解析 根据双曲线的对称性, 得

$\triangle ABE$  中,  $|AE| = |BE|$ ,

$\triangle ABE$  是锐角三角形, 即  $\angle AEB$  为锐角,



由此可得  $\text{Rt}\triangle AFE$  中,  $\angle AEF < 45^\circ$ ,

得  $|AF| < |EF|$

$$\therefore |AF| = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a}, |EF| = a + c,$$

$$\therefore \frac{c^2 - a^2}{a} < a + c, \text{ 即 } 2a^2 + ac - c^2 > 0,$$

两边都除以  $a^2$ , 得  $e^2 - e - 2 < 0$ , 解之得  $-1 < e < 2$ ,

$\therefore$  双曲线的离心率  $e > 1$ ,

$\therefore$  该双曲线的离心率  $e$  的取值范围是  $(1, 2)$ .

27 抛物线  $C: y = \frac{1}{4}x^2$  的焦点为  $F$ , 其准线  $l$  与  $y$  轴交与点  $A$ , 点  $M$  在抛物线  $C$  上, 当  $\frac{|MA|}{|MF|} = \sqrt{2}$  时,

$\triangle AMF$  的面积为 ( ).

A. 1

B. 2

C.  $2\sqrt{2}$

D. 4

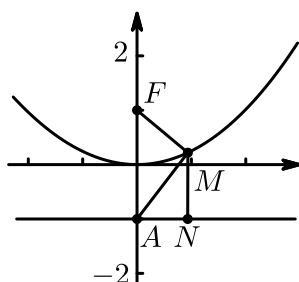
答案

B

解析

$F(0, 1)$ ,  $A(0, -1)$  过  $M$  作  $MN \perp l$  垂足为  $N$ , 则  $|MN| = |MF|$ ,

$$\therefore \frac{|MA|}{|MF|} = \sqrt{2},$$



$\therefore \triangle AMF$  的高等于  $|AN|$ , 设  $M\left(m, \frac{1}{4}m^2\right) (m > 0)$ ,

则  $\triangle AMF$  的面积  $= \frac{1}{2} \times 2m = m$ ,

又由  $\frac{|MA|}{|MF|} = \sqrt{2}$ , 三角形  $AMN$  为等腰直角三角形,

$$\therefore \frac{1}{4}m^2 + 1 = m,$$

所以  $m = 2$ ,

$\therefore \triangle AMF$  的面积 2.

故选 B.

28 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点到抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的准线的距离为 4, 点

$(2, 2\sqrt{2})$  是双曲线的一条渐近线与抛物线的一个交点, 则双曲线的标准方程为 ( ).

A.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

B.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

C.  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

D.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

答案 D

解析

设双曲线的右焦点为  $(c, 0)$  .

$\therefore$  抛物线为  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) .

$\therefore$  开口向右, 可得准线为  $x = -\frac{p}{2}$  .

$\therefore$  有  $c + \frac{p}{2} = 4$  ① .

双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$  .

由于交点为  $y = \pm \frac{b}{a}x$  . 故只考虑  $y = \frac{b}{a}x$  .

$$\therefore \begin{cases} 2\sqrt{2} = \frac{b}{a} \cdot 2 \\ 2 \cdot 2p = (2\sqrt{2})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = \sqrt{2} \\ p = 2 \end{cases} .$$

将③代入①, 得  $c = 3$  .

又有  $a^2 + b^2 = c^2$  ④ .

$$\text{联立②④得: } \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = \sqrt{6} \end{cases} .$$

故双曲线方程为  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$  .

29 过点  $(0, 3b)$  的直线  $l$  与双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条斜率为正值的渐近线平行, 若双曲线  $C$  的右支上的点到直线  $l$  的距离恒大于  $b$ , 则双曲线  $C$  的离心率的最大值是 \_\_\_\_\_ .

答案 3

解析

由双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的渐近线方程  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ,

可得直线  $l$  的方程为  $y = \frac{b}{a}x + 3b$ , 即  $bx - ay + 3ab = 0$ ,

由双曲线  $C$  的右支上的点到直线  $l$  的距离恒大于  $b$ ,

可得直线  $l$  与  $bx - ay = 0$  的距离恒大于等于  $b$ ,

$$\text{即有 } \frac{3ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq b,$$

$$\text{化简可得 } 8a^2 \geq b^2,$$

$$8a^2 \geq c^2 - a^2,$$

$$\text{即 } c^2 \leq 9a^2, \text{ 即有 } c \leq 3a,$$

可得离心率  $e = \frac{c}{a} \leq 3$  .

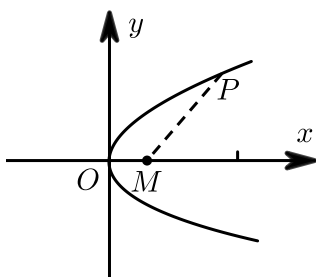
则离心率的最大值为 3 .

故答案为 : 3 .

- 30 已知  $P$  为抛物线  $C: y^2 = 4\sqrt{2}x$  上一点, 点  $M(\sqrt{2}, 0)$ , 若  $|PM| = 4\sqrt{2}$ , 则  $\triangle POM$  ( $O$  为坐标原点) 的面积为 \_\_\_\_\_ .

答案  $2\sqrt{3}$

解析 如图:



由题意, 易知点  $M$  为抛物线  $C$  的一个焦点,

$\therefore P$  在抛物线上, 且  $|PM| = 4\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  设  $P(x_0, y_0)$ , 则  $x_0 + \frac{p}{2} = x_0 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ,

$\therefore x_0 = 3\sqrt{2}$ ,

$\therefore P(3\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{6})$ ,

$\therefore S_{\triangle POM} = \frac{1}{2}|OM| \cdot |y_0|$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{6}$

$= 2\sqrt{3}$ ,

故  $S_{\triangle POM}$  的面积为  $2\sqrt{3}$  .

- 31 抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的准线与  $x$  轴的交点为  $M$ , 过点  $M$  作  $C$  的两条切线, 切点分别为  $P, Q$ , 则  $\angle PMQ =$  \_\_\_\_\_ .

答案  $\frac{\pi}{2}$

**解析** 抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的准线与  $x$  轴的交点为  $M$ ,

则  $M(-\frac{p}{2}, 0)$ ,

设直线  $MP$  的方程为  $x = ky - \frac{p}{2}$ ,

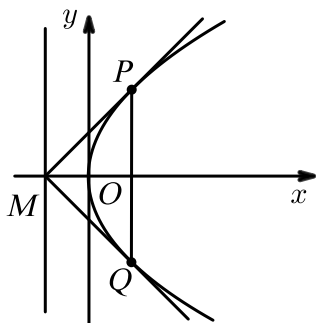
由  $\begin{cases} x = ky - \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases}$  得  $y^2 - 2pkx + p^2 = 0$ ,

$\Delta = 4k^2p^2 - 4p^2 = 0$ , 可得  $k = \pm 1$ ,

$\therefore$  两切线的互相垂直,

$\therefore \angle PMQ = \frac{\pi}{2}$ ,

故答案为:  $\frac{\pi}{2}$ .



32 已知  $P$  是抛物线  $y^2 = 4x$  上任意一点,  $Q$  是圆  $(x-4)^2 + y^2 = 1$  上任意一点, 则  $|PQ|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

**答案**  $2\sqrt{3} - 1$

**解析** 设点  $P$  的坐标为  $(\frac{1}{4}m^2, m)$ ,

圆  $(x-4)^2 + y^2 = 1$  的圆心坐标  $A(4, 0)$ ,

$\therefore |PA|^2 = (\frac{1}{4}m^2 - 4)^2 + m^2 = \frac{1}{16}(m^2 - 8)^2 + 12 \geq 12$ ,

$\therefore |PA| \geq 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore Q$  是圆  $(x-4)^2 + y^2 = 1$  上任意一点,

$\therefore |PQ|$  的最小值为  $2\sqrt{3} - 1$ ,

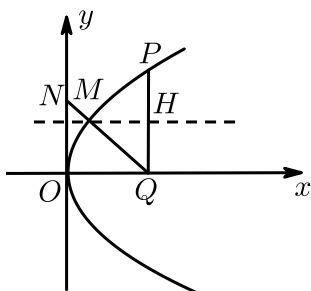
故答案为:  $2\sqrt{3} - 1$ .



已知 $P$ 为抛物线 $y^2 = x$ 上异于原点 $O$ 的点.  $PQ \perp x$ 轴, 垂足为 $Q$ , 过 $PQ$ 的中点作 $x$ 轴的平行线交抛物线于点 $M$ , 直线 $QM$ 交 $y$ 轴于点 $N$ . 则 $\frac{|PQ|}{|NO|} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

答案  $\frac{3}{2}$

解析 如图:



设 $P(t^2, t)$ , 则 $Q(t^2, 0)$ ,  $PQ$ 中点 $H(t^2, \frac{t}{2})$ ,  $M(\frac{t^2}{4}, \frac{t}{2})$ ,

$\therefore$  直线 $MQ$ 的方程为:  $y = \frac{\frac{t}{2} - 0}{\frac{t^2}{4} - t^2}(x - t^2)$ ,

令 $x = 0$ , 可得 $y_N = \frac{2t}{3}$ ,

$\therefore \frac{|PQ|}{|NO|} = \frac{t}{\frac{2t}{3}} = \frac{3}{2}$ .

故答案为:  $\frac{3}{2}$ .

## 二、限时训练

34 若 $z_1 = a + 2i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$ , 且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 $a$ 的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

答案  $\frac{8}{3}$

解析  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + 2i}{3 - 4i} = \frac{(a + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)}$   
 $= \frac{3a - 8 + (4a + 6)i}{5}$ ,

$\therefore$  它是纯虚数,

$\therefore 3a - 8 = 0$  且  $4a + 6 \neq 0$ .

得 $a = \frac{8}{3}$ .

本部分共6个填空题，共限时20分钟.

- 35 设 $f(x)$ 是 $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^6$ 展开式的中间项，若 $f(x) \leq mx$ 在区间 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$ 上恒成立，则实数 $m$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

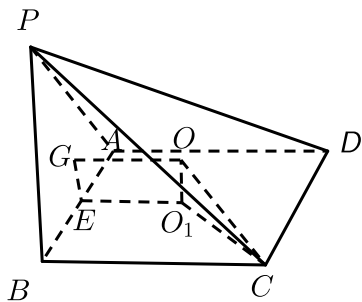
答案  $[5, +\infty)$

解析 由题意可得 $f(x) = C_6^3 \cdot x^6 \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^3 = \frac{5}{2} \cdot x^3$ ，  
由 $f(x) \leq mx$ 在区间 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$ 上恒成立，  
可得 $m \geq \frac{5}{2}x^2$ 在区间 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$ 上恒成立，  
由于 $\frac{5}{2}x^2$ 在区间 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$ 上的最大值为5，故 $m \geq 5$ ，  
即 $m$ 的范围为 $[5, +\infty)$ ，  
故答案为： $[5, +\infty)$  .

- 36 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形，侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PA = PB = 4$ ，则该四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为 \_\_\_\_\_ .

答案  $\frac{316\pi}{15}$  .

解析



设正方形的中心 $O_1$ ，三角形 $PAB$ 的外心 $G$ ，  
取 $AB$ 的中点 $E$ ，连 $EG$ ， $EO_1$ ，则 $EG \perp AB$ ， $EO_1 \perp AB$ ，  
分别以 $EG$ ， $EO_1$ 为邻边作一个矩形 $EGOO_1$ ，如图，  
因为侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ ，  
则 $OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， $OG \perp$ 平面 $PAB$ ，

则  $OA = OB = OC = OD = OP$  ,

所以点  $O$  就是该外接球的球心 ,

由  $PA = PB = 4$  , 可得  $EG = \frac{7\sqrt{15}}{15}$  ,

在  $\text{Rt}\triangle OO_1C$  中 ,  $OC^2 = R^2 = OO_1^2 + O_1C^2 = GE^2 + O_1C^2 = \frac{49}{15} + 2 = \frac{79}{15}$  ,

外接圆的表面积为  $4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{79}{15} = \frac{316\pi}{15}$  ,

故答案为 :  $\frac{316\pi}{15}$  .

- 37 某学校为了迎接市春季运动会 , 从5名男生和4名女生组成的田径运动队中选出4人参加比赛 , 要求男、女生都有 , 则男生甲与女生乙至少有1人入选的方法种数为 \_\_\_\_\_ .

答案 86

解析 方法一 (直接法) : 由题意 , 可分三类考虑 : 第1类 , 男生甲入选 , 女生乙不入选的方法种数为  $C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^1 + C_3^3 = 31$  .

第2类 , 男生甲不入选 , 女生乙入选的方法种数为  $C_4^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 + C_4^3 = 34$  .

第3类 , 男生甲入选 , 女生乙入选的方法种数为  $C_3^2 + C_4^1 C_3^1 + C_4^2 = 21$  .

所以男生甲与女生乙至少有1人入选的方法种数为  $31 + 34 + 21 = 86$  .

方法二 (间接法) : 从5名男生和4名女生中任意选出4人 , 男、女生都有的选法有

$C_9^4 - C_5^4 - C_4^4 = 120$  (种) . 男、女生都有 , 且男生甲与女生乙都没有入选的方法有

$C_7^4 - C_4^4 = 34$  (种) ,

所以男生甲与女生乙至少有1人入选的方法种数为  $120 - 34 = 86$  .

- 38 设二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的导函数为  $f'(x)$  , 若对任意  $x \in \mathbf{R}$  , 不等式  $f(x) \geq f'(x)$  恒成立 , 则  $\frac{b^2}{a^2 + 2c^2}$  的最大值 \_\_\_\_\_ .

答案  $\sqrt{6} - 2$

解析 由题设可知 :

由二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的导函数为 :  $f'(x) = 2ax + b$  ,

则不等式  $f(x) \geq f'(x)$  恒成立 ,

转化为  $ax^2 + (b - 2a)x + c - b \geq 0$  恒成立，

$$\text{即} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = (b - 2a)^2 - 4a(c - b) \leq 0 \end{cases} ,$$

$$\text{即} \begin{cases} a > 0 \\ b^2 \leq 4ac - 4a^2 \end{cases} ,$$

$$\text{故} \frac{b^2}{a^2 + 2c^2} \leq \frac{4ac - 4a^2}{a^2 + 2c^2} = \frac{4\left(\frac{c}{a} - 1\right)}{1 + 2\left(\frac{c}{a}\right)^2} ,$$

$$\text{令} \frac{c}{a} = t > 1 ,$$

$$\text{即} \frac{4\left(\frac{c}{a} - 1\right)}{1 + 2\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{4(t - 1)}{2t^2 + 1} = \frac{4(t - 1)}{2(t - 1)^2 + 4(t - 1) + 3}$$

$$= \frac{4}{2(t - 1) + \frac{3}{t - 1} + 4}$$

$$\leq \frac{4}{2\sqrt{2(t - 1) \cdot \frac{3}{t - 1}} + 4} = \frac{4}{2\sqrt{6} + 4} = \sqrt{6} - 2 ,$$

$$\text{当且仅当} 2(t - 1) = \frac{3}{t - 1} ,$$

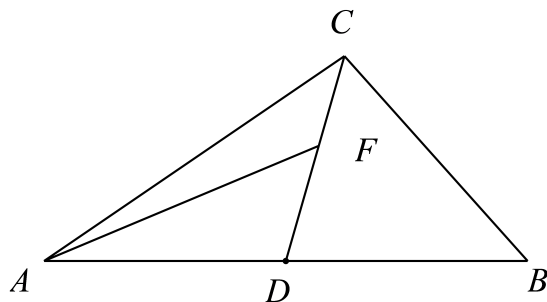
$$\text{即} t = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \text{ 时等号成立 ,}$$

$$\text{故} \frac{b^2}{a^2 + 2c^2} \text{ 的最大值为 } \sqrt{6} - 2 .$$

故本题填  $\sqrt{6} - 2$  .

39 如图所示，在  $\triangle ABC$  中， $AD = \frac{1}{2}AB$ ， $F$  在线段  $CD$  上，设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AF} = x\vec{a} + y\vec{b}$

则  $x^2 + y^2$  的最小值为 \_\_\_\_\_ .



答案  $\frac{1}{5}$

解析  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，  
 $\overrightarrow{AF} = x\vec{a} + y\vec{b} = 2x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AC}$ ，

$C, F, D$  三点共线 ,

$$\therefore 2x + y = 1 ,$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (1 - 2x)^2 = 5x^2 - 4x + 1 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} ,$$

$$\therefore (x^2 + y^2)_{\min} = \frac{1}{5} .$$