

函数比大小与函数图像 (小题)

一、函数类小题

比大小

1 若 $a = \ln \frac{1}{2}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.8}$, $c = 2^{\frac{1}{3}}$, 则 () .

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $c < a < b$

D. $b < a < c$

答案 B

解析 $a = \ln \frac{1}{2} < 0$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.8} \in (0, 1)$, $c = 2^{\frac{1}{3}} > 1$,

$\therefore c > b > a$.

故选: B.

2 已知 $a = 2^{1.2}$, $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8}$, $c = 2\log_5 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $c < b < a$

B. $c < a < b$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

答案 A

解析 $\because a = 2^{1.2} > 2^1 \therefore a > 2$

$\because b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8} = 2^{0.8} > 2^0$, $2^{0.8} < 2^1 \therefore 1 < b < 2$

$\because c = 2\log_5 2 = \log_5 4 < \log_5 5 \therefore 0 < c < 1$

$\therefore c < b < a$, 故选 A.

3 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 则 () .

A. $f(0) < f(\log_3 2) < f(-\log_2 3)$

B. $f(\log_3 2) < f(0) < f(-\log_2 3)$

C. $f(-\log_2 3) < f(\log_3 2) < f(0)$

D. $f(\log_3 2) < f(-\log_2 3) < f(0)$

答案 C

解析 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数,

$$\therefore f(-\log_2 3) = f(\log_2 3),$$

$$\because \log_2 3 > 1, 0 < \log_3 2 < 1,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减,

$$\therefore f(-\log_2 3) < f(\log_3 2) < f(0).$$

4 已知 $a = 5^{\log_2 3.4}, b = 5^{\log_4 3.6}, c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$, 则 () .

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $a > c > b$

D. $c > a > b$

答案 C

解析 $\because \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3} = 5^{\log_3 \frac{10}{3}}, 1 < \log_2 3.4 < 2, 0 < \log_4 3.6 < 1, 1 < \log_3 \frac{10}{3} < 2$, 且

$$\log_2 3.4 > \log_2 \frac{10}{3} > \log_3 \frac{10}{3}.$$

$$\therefore \log_2 3.4 > \log_3 \frac{10}{3} > \log_4 3.6,$$

$$\therefore 5^{\log_2 3.4} > 5^{\log_3 \frac{10}{3}} > 5^{\log_4 3.6}.$$

5 已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}, b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $c > b > a$

D. $c > a > b$

答案 D

解析 方法一: $a = \log_3 \frac{7}{2} > 1, 0 < b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} < 1, c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = \log_3 5 > \log_3 \frac{7}{2}$,

所以 $c > a > b$.

方法二: 因为 $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = \log_3 5 > \log_3 \frac{7}{2} > \log_3 3 = 1$,

所以 $c > a$,

又 $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$, 所以 $b < a < c$.

故选D.

6 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 设 $a = 3^{0.3} \cdot f(3^{0.3})$, $b = (\log_{\pi} 3) \cdot f(\log_{\pi} 3)$,

$c = \left(\log_3 \frac{1}{9}\right) \cdot f\left(\log_3 \frac{1}{9}\right)$, 则 a, b, c 之间的大小关系为 ().

A. $b < a < c$

B. $a < b < c$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

答案 A

解析 设 $g(x) = xf(x)$,

则 $g'(x) = f(x) + xf'(x) < 0 (x < 0)$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $g(x) = xf(x)$ 为减函数,

又 $g(x)$ 为偶函数,

$\therefore x > 0$ 时, $g(x)$ 为增函数,

$\therefore 1 < 3^{0.3} < 2, 0 < \log_{\pi} 3 < 1, \log_3 \frac{1}{9} = -2$,

$\therefore g(-2) > g(3^{0.3}) > g(\log_{\pi} 3)$,

即 $c > a > b$.

故选A.

7

已知, $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, $a = \left(\frac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_2 \frac{7}{9}$ 则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小顺序为 ().

A. $f(b) < f(a) < f(c)$

B. $f(c) < f(b) < f(a)$

C. $f(c) < f(a) < f(b)$

D. $f(b) < f(c) < f(a)$

答案 B

解析

$$a = \left(\frac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} > b = \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

$$c = \log_2 \frac{7}{9} < 0,$$

$$\therefore c < b < a,$$

$$\because f(x) = 2^x - 2^{-x} \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上为增函数},$$

$$\therefore f(c) < f(b) < f(a),$$

故选：B.

8 已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[1-3m, 2m]$ 上的偶函数，且当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 单调递增，若

$$a = f(m), b = f(2^{-0.4}), c = f\left(\log_4 \frac{1}{5}\right), \text{ 则 } a, b, c \text{ 的大小关系是 ()}.$$

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $c > a > b$

答案

D

解析

$\because$ 若 $f(x)$ 在 $[1-3m, 2m]$ 上为偶函数，

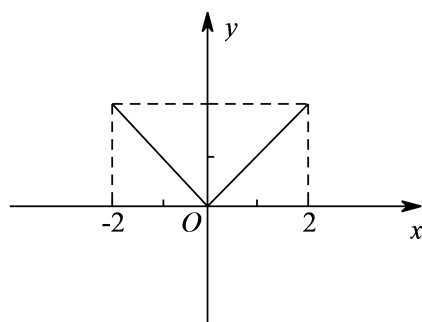
$$\text{则 } 2m = -(1-3m), \therefore m = 1,$$

则定义域为 $[-2, 2]$ ，

$\because$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 单增，

$\therefore x \in (-\infty, 0)$ 时， $f(x)$ 单减，

$\therefore f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 图像大致为：



$$\because m = 1, \therefore a = f(1),$$

$$\text{又 } b = f(2^{-0.4}),$$

$$\because 2^{-0.4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.4} < 1,$$

$$\therefore b = f(2^{-0.4}) < f(1), \therefore a > b,$$

$$\because c = f\left(\log_4 \frac{1}{5}\right),$$

$$\log_4 \frac{1}{5} = -\log_4 5,$$

$$\therefore c = f(-\log_4 5) = f(\log_4 5),$$

$$\because 1 < \log_4 5 < 2, \therefore f(\log_4 5) > f(1),$$

$$\therefore c > a > b,$$

故选D.

9 已知 $a = \log_5 6$, $b = \ln 0.5$, $c = 0.6^{0.5}$, 则 ().

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

答案 B

解析 $\because a = \log_5 6 > 1$, $b = \ln 0.5 < 0$, $c = 0.6^{0.5} \in (0, 1)$,

$$\therefore a > c > b.$$

故选B.

10 若 $0 < x < y < 1$, 则下列结论正确的是 ().

A. $3^x > 3^y$

B. $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^y$

C. $\log_{1.3} x < \log_{1.3} y$

D. $\log_{0.3} x < \log_{0.3} y$

答案 C

解析 A选项: 若 $0 < x < y < 1$, 则 $3^x < 3^y$, A错误;

B选项: 若 $0 < x < y < 1$, 则 $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^y$, B错误;

C选项: 若 $0 < x < y < 1$, 则 $\log_{1.3} x < \log_{1.3} y$, C正确;

D选项: 若 $0 < x < y < 1$, 则 $\log_{0.3} x > \log_{0.3} y$, D错误.

故选C.

11 已知 $a = \sqrt{2^{\frac{4}{3}}}$, $b = 2^{\frac{2}{5}}$, $c = \log_5 4$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $c < b < a$

B. $c < a < b$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

答案 A

解析 $a = \sqrt{2^{\frac{4}{3}}} = 2^{\frac{2}{3}}$,

$$\therefore a > b > 1,$$

$$\therefore 0 < c = \log_5^4 < 1,$$

$$\therefore c < b < a.$$

故选A.

12 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x-1)$ 的图像关于 $x=1$ 对称, 且当 $x>0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 若

$a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(0.5^{-1.3})$, $c = f(0.7^6)$, 则 a, b, c 的大小关系是().

A. $c > a > b$

B. $b > a > c$

C. $a > c > b$

D. $c > b > a$

答案 A

解析 $\because f(x-1)$ 关于 $x=1$ 对称, 则 $f(x)$ 关于 y 轴对称, 为偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore \log_{0.5} 3 < 0, \log_{0.5} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3 = -\log_2 3,$$

$$\therefore f(-\log_2 3) = f(\log_2 3),$$

$$\therefore 1 < \log_2 3 < 2,$$

$$\text{又} \because 0.5^{-1.3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.3} = 2^{1.3} > 2,$$

$$\text{又} \because 0.7^6 < 1,$$

$$\therefore 0.7^6 < \log_2 3 < 0.5^{-1.3},$$

又 $\because$ 在 $x>0$, $f(x)$ 单调递减,

$$\therefore f(0.7^6) > f(\log_2 3) > f(0.5^{-1.3}),$$

$$\therefore c > a > b.$$

故选A.

13 已知 $f(x) = |2^x - 1|$, 当 $a < b < c$ 时, 有 $f(a) > f(c) > f(b)$, 则必有().

A. $a < 0, b < 0, c < 0$

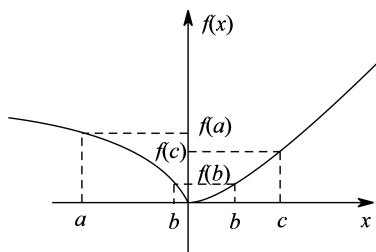
B. $a < 0, b > 0, c > 0$

C. $2^{-a} < 2^c$

D. $1 < 2^a + 2^c < 2$

答案 D

解析 根据题意画出函数图象，



A, 三个不可能都小于0, 应为都为负数时, 函数单调递减即 $a < b < c$ 时, 得不到

$$f(a) > f(c) > f(b).$$

B, b 的符号不一定为正, 还可以为负.

C, $\because -a > c > 0, \therefore 2^{-a} > 2^c$, 故错误.

D, 根据函数图象可知: $a < 0, c > 0$,

$$\therefore 0 < 2^a < 1, 2^c > 1,$$

$$\therefore 1 < 2^a + 2^c < 2.$$

故选: D.

14 已知 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, $f(m) = 3$, 且 $m > 0$, 若 $a = f(2m)$, $b = 2f(m)$, $c = f(m+2)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $c < b < a$

B. $a < c < b$

C. $a < b < c$

D. $b < a < c$

答案 D

解析 $\because f(m) = 2^m + 2^{-m} = 3, m > 0$,

$$\therefore 2^m = 3 - 2^{-m} > 2,$$

$$\therefore b = 2f(m) = 2 \times 3 = 6,$$

$$a = f(2m) = 2^{2m} + 2^{-2m} = (2^m + 2^{-m})^2 - 2 = 7,$$

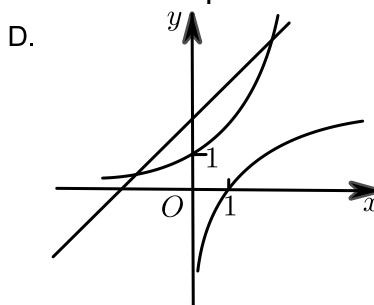
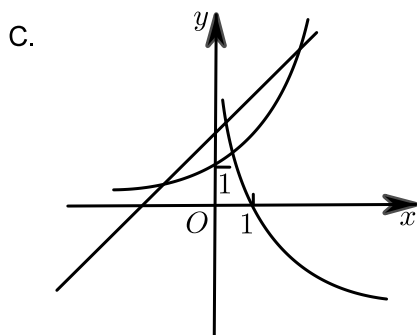
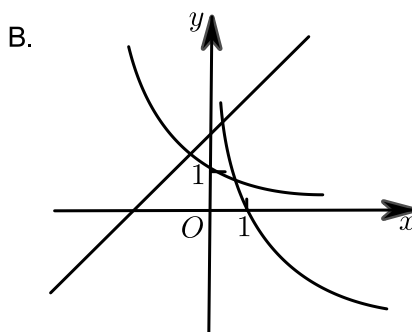
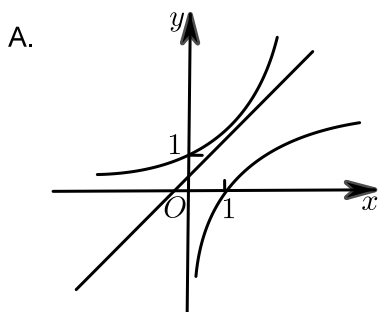
$$c = f(m+2) = 2^{m+2} + 2^{-m-2} = 4 \cdot 2^m + \frac{1}{4} 2^{-m} > 8,$$

$$\therefore b < a < c.$$

故选D.

图像

15 在同一坐标系中画出函数 $y = \log_a x$, $y = a^x$, $y = x + a$ 的图象, 可能正确的是 ().



答案 D

解析 A中 $y = \log_a x$ 、 $y = a^x$ 都单调递增, 故 $a > 1$,

但是 $y = x + a$ 中 $0 < a < 1$, 矛盾. 排除A.

B中 $y = \log_a x$ 、 $y = a^x$ 都单调递减, 故 $0 < a < 1$,

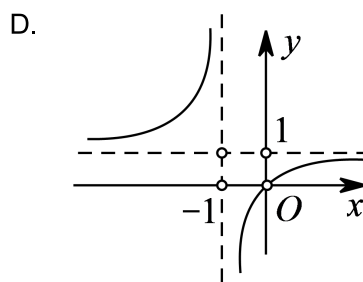
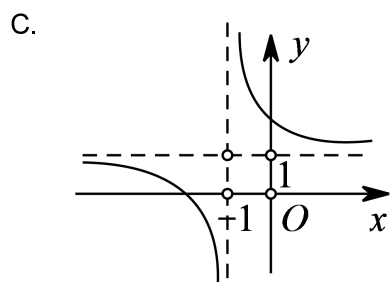
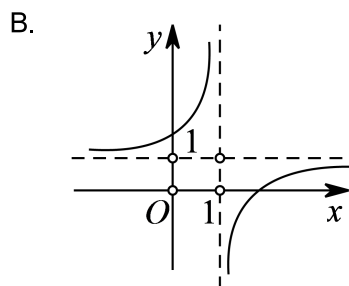
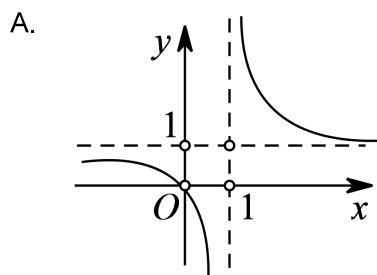
但是 $y = x + a$ 中 $a > 1$, 矛盾. 排除B.

C中 $y = \log_a x$ 单调递减, 故 $0 < a < 1$,

$y = a^x$ 单调递增, 故 $a > 1$, 矛盾. 排除C.

故选D.

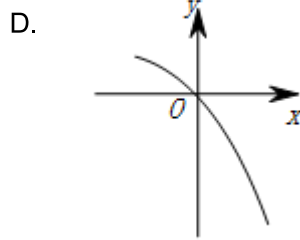
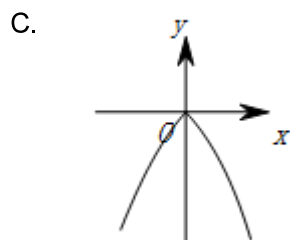
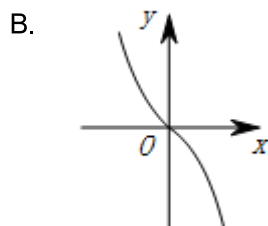
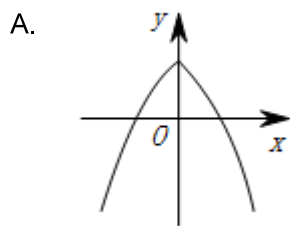
16 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 的图象是 ().



答案 B

解析 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 的图象可看成由函数 $y = \frac{-1}{x}$ 的函数图象先向右平移一个单位为 $y = \frac{-1}{x-1}$ ，再向上平移一个单位变成 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 。
故选B。

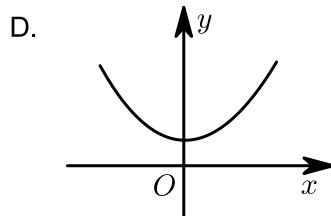
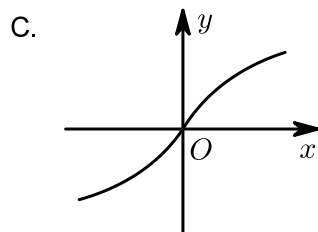
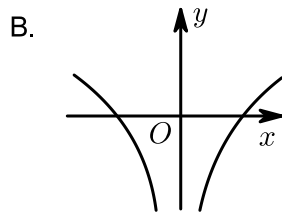
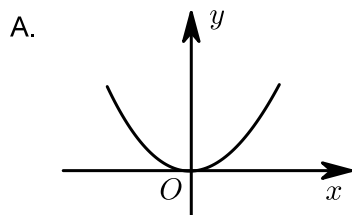
17 函数 $f(x) = 1 - 2^{|x|}$ 的图象大致是 ()。



答案 C

解析 因为 $|x| \geq 0$, 所以 $2^{|x|} \geq 1$, 所以 $f(x) = 1 - 2^{|x|} \leq 0$, 故选C。

18 函数 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 的图象大致是 () .



答案 A

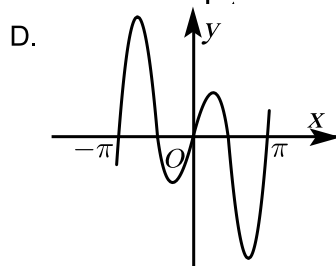
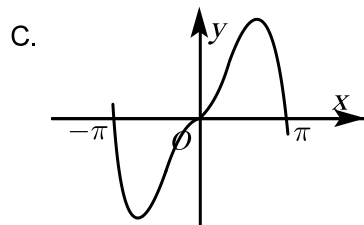
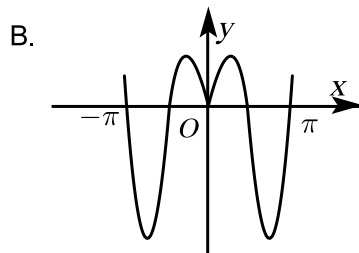
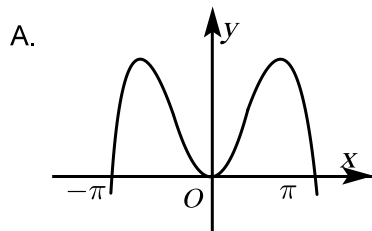
解析 由 $f(-x) = \ln[(-x)^2 + 1] = \ln(x^2 + 1) = f(x)$,

故函数是偶函数, 排除C .

又 $f(0) = \ln(0 + 1) = 0$, 排除B , D .

故选A .

19 函数 $y = 2^{|x|} \sin 2x$ 的图象可能是 () .



答案 D

解析 因为 $y = f(x) = 2^{|x|} \sin 2x$,

则 $f(-x) = 2^{|-x|} \sin(-2x) = -2^{|x|} \sin 2x = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数, 故排除 A、B;

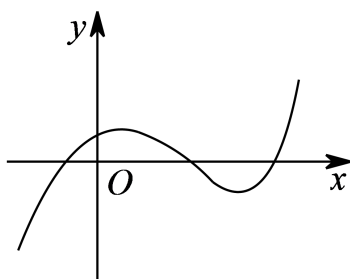
又因为当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{\frac{\pi}{2}} \sin \pi = 0$,

所以 C 错误;

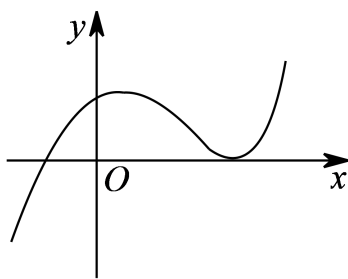
故选 D.

20 函数 $y = 2^x - x^2$ 的图像大致是 ().

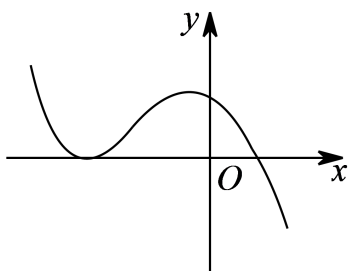
A.



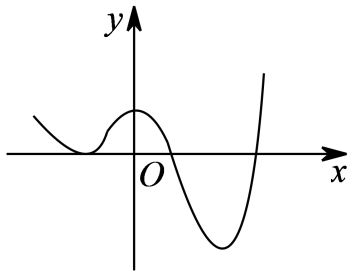
B.



C.



D.



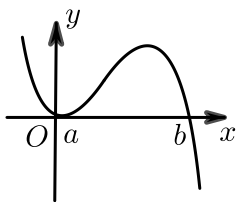
答案 A

解析 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $2^x \rightarrow 0, x^2 \rightarrow +\infty$, 故 $y = 2^x - x^2 \rightarrow -\infty$, C、D 错误;

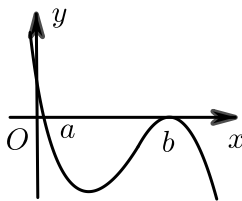
$y' = 2^x \ln 2 - 2x$, $y'(1) = 2 \ln 2 - 2 < 0$, 故 B 错误, 从而选 A.

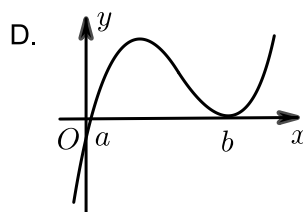
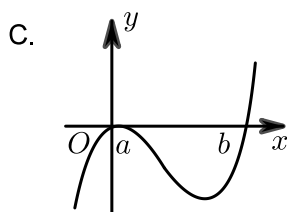
21 设 $a < b$, 函数 $y = (x - a)^2(x - b)$ 的图像可能是 ().

A.



B.





答案 C

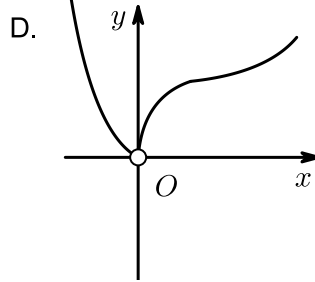
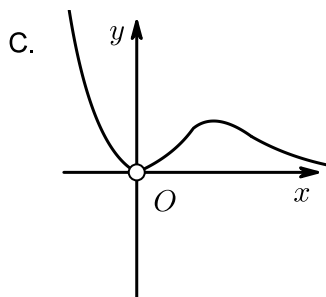
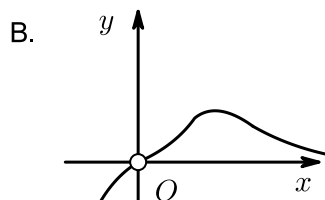
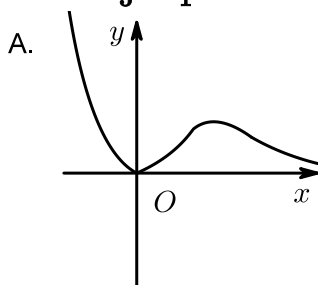
解析 可得 $x = a$, $x = b$ 为 $y = (x - a)^2(x - b) = 0$ 的两个零解.

当 $x < a$ 时, 则 $x < b$, $\therefore f(x) < 0$.

当 $a < x < b$ 时, 则 $f(x) < 0$, 当 $x > b$ 时, 则 $f(x) > 0$.

故选C.

22 函数 $y = \frac{x^3}{3^x - 1}$ 的图象大致是 ().



答案 C

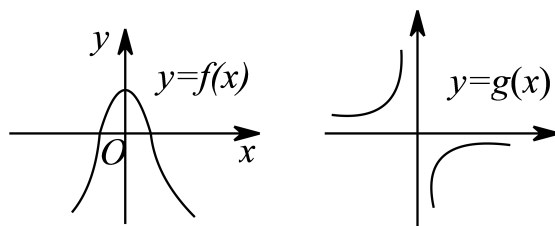
解析 由函数解析式可得, 该函数定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 故A错误.

取 $x = -1$, $y = \frac{-1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2} > 0$, 故排除B.

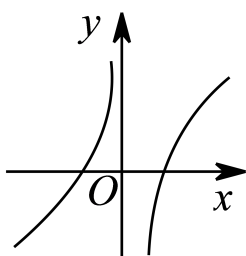
当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $3^x - 1$ 远远大于 x^3 的值且都为正, 故 $\frac{x^3}{3^x - 1} \rightarrow 0$ 且远远大于0, 故排除D,

$\therefore$ 答案为C.

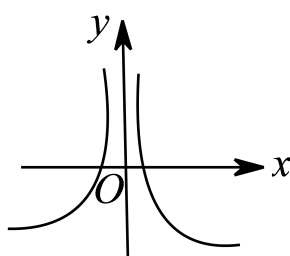
23 函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像如下图：则函数 $y = f(x) \cdot g(x)$ 的图像可能是 () .



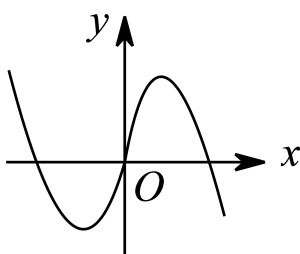
A.



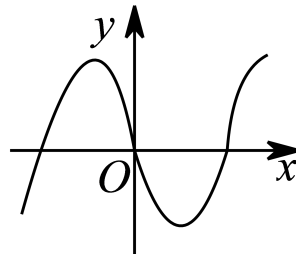
B.



C.



D.



答案

A

解析

$\because$ 函数 $y = f(x) \cdot g(x)$ 的定义域是函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的定义域的交集 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
图像不经过坐标原点 ,

故可以排除 C、D .

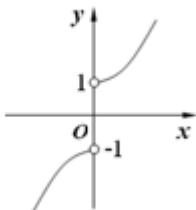
由于当 x 为很小的正数时 $f(x) > 0$ 且 $g(x) < 0$, 故 $f(x) \cdot g(x) < 0$.

$\therefore$ 选 A .

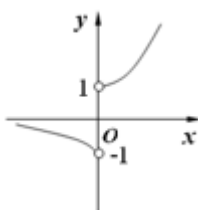
明确函数图像在 x 轴上下方与函数值符号改变的关系 , 数值相乘“同号为正、异号为负” .

24 函数 $y = \frac{xa^x}{|x|}$ ($0 < a < 1$) 的图象的大致形状是 () .

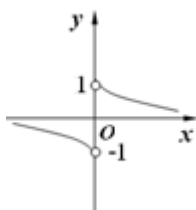
A.



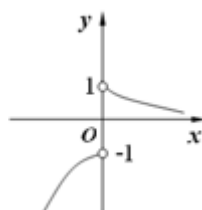
B.



C.



D.



答案 D

解析

函数定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$ ，且 $y = \frac{xa^x}{|x|} = \begin{cases} a^x, & x > 0 \\ -a^x, & x < 0 \end{cases}$ ，

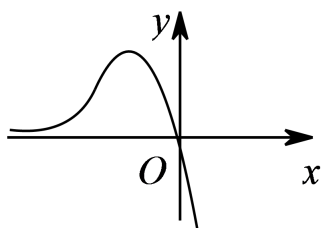
当 $x > 0$ 时，函数是一个指数函数，其底数 $0 < a < 1$ ，所以函数递减；

当 $x < 0$ 时，函数图象与指数函数 $y = a^x (x < 0)$ 的图象关于 x 轴对称，函数递增。

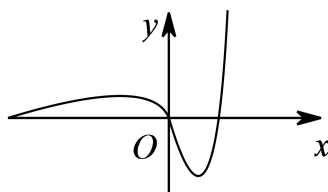
故选D。

25 函数 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ 的图象大致是()。

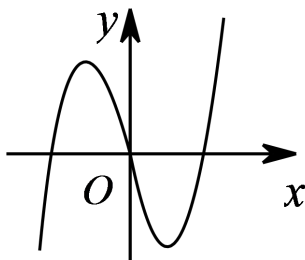
A.



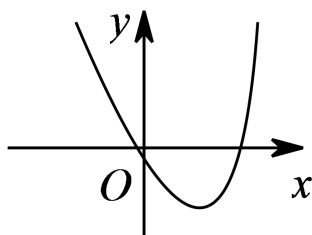
B.



C.



D.



答案 B

解析

由 $f(x) = 0$ ，解得 $x^2 - 2x = 0$ ，即 $x = 0$ 或 $x = 2$ 。

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 有两个零点。

$\therefore$ A, C不正确。

$\therefore f'(x) = (x^2 - 2)e^x$ 。

由 $f'(x) = (x^2 - 2)e^x > 0$ ，解得 $x > \sqrt{2}$ 或 $x < -\sqrt{2}$ 。

由 $f'(x) = (x^2 - 2)e^x < 0$ ，解得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 。

$\therefore x = \sqrt{2}$ 是函数的一个极大值点。

$\therefore$ D不成立，排除D。

故选：B。

二、限时训练

本部分共9个选择题，限时25分钟.

26 设集合 $S = \{x|x > -2\}$, $T = \{x|x^2 + 3x - 4 \leq 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} S) \cup T = (\quad)$.

- A. $(-2, 1]$ B. $(-\infty, -4]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, +\infty)$

答案 C

解析 由题意得 $\complement_{\mathbb{R}} S = \{x|x \leq -2\}$, $T = \{x|-4 \leq x \leq 1\}$, 所以 $(\complement_{\mathbb{R}} S) \cup T = (-\infty, 1]$, 故选C .

27 命题“ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \in \mathbb{N}^*$ 且 $f(n) \leq n$ ”的否定形式是 ($\quad$) .

- A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \notin \mathbb{N}^*$ 且 $f(n) > n$
 B. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \notin \mathbb{N}^*$ 或 $f(n) > n$
 C. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $f(n_0) \notin \mathbb{N}^*$ 且 $f(n_0) > n_0$
 D. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $f(n_0) \notin \mathbb{N}^*$ 或 $f(n_0) > n_0$

答案 D

解析 根据全称命题的否定，对“任意”的否定是“存在”，
 对“且”的否定是“或”，所D项正确 .

28 若样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的标准差为8，则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$ 的标准差为 ($\quad$) .

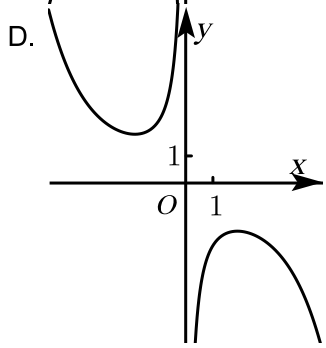
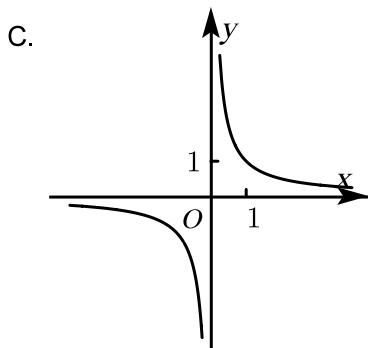
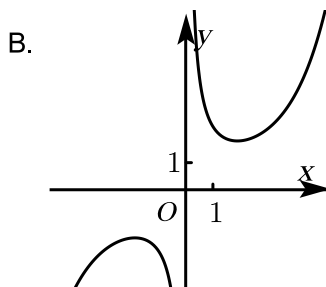
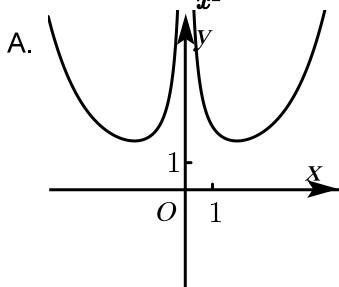
- A. 8 B. 15 C. 16 D. 32

答案 C

解析 样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$, 其标准差 $\sqrt{DX} = 8$, 则 $DX = 64$.

而样本数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$ 的方差 $D(2x - 1) = 2^2 DX = 2^2 \cdot 64$,
所以其标准差为 $\sqrt{2^2 \times 64} = 16$, 故选 C.

29 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 ().



答案 B

解析 A. 函数 $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(-x)^2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{x^2} = -f(x)$,

则函数 $f(x)$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 故 A 错误;

C. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 C 错误;

D. 当 $x = 1$ 时, $f(1) = e - \frac{1}{e} > 0$, 故 D 错误.

故选 B.

30 已知函数 $f(x) = \ln x$, 则函数 $g(x) = f(x) - f'(x)$ 的零点所在的区间是 ().

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (2, 3)

D. (3, 4)

答案 B

解析

$$f(x) = \ln x, \text{ 所以 } f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = f(x) - f'(x) = \ln x - \frac{1}{x},$$

$$g(1) = -1 < 0, g(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \ln e^{\frac{1}{2}} > 0,$$

根据零点存在定理, $g(1) \cdot g(2) < 0$, 所以零点在 $(1, 2)$ 内,

故选 B.

31 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab > 0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 ().

A. $a^2 + b^2 > 2ab$

B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$

D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

答案

D

解析

方法一: A项. 当 $a = b$ 时, 有 $a^2 + b^2 = 2ab$, 故 A 项不符合题意;

B项. 当 $a > 0$, 且 $b > 0$ 时, 有 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 取“=”;

当 $a < 0$, 且 $b < 0$ 时, 有 $-a - b \geq 2\sqrt{(-a)(-b)}$, 即 $a + b \leq -2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 取“=”, 故 B 项不符合题意;

C项. 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, 当 $a > 0$, 且 $b > 0$ 时, 有 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”;

当 $a < 0$, 且 $b < 0$ 时, 有 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq -\frac{2}{\sqrt{ab}}$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”, 故 C 项错误;

D项. 因为 $ab > 0$, 所以 $\frac{b}{a} > 0$, $\frac{a}{b} > 0$, 所以有 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”.

故选: D.

方法二: $\because a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, A 错误,

对 B、C, 当 $a < 0, b < 0$ 时, 明显错误,

对 D, $\because ab > 0, \therefore \frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0, \therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} = 2$,

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ 即 $a = b$ 时取等号, 故选 D.

32 已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6, \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2$, 则向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角是 ().

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

答案 C

解析

$$\text{由 } \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 = 2,$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + |\vec{a}|^2 = 3,$$

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{1 \times 6} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$.

故选C.

33 在区间 $[0, 2]$ 上随机地取一个数 x , 则事件 “ $-1 \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 1$ ” 发生的概率为 ().

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

答案 A

解析

由 $-1 \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 1$, 解得 $\frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq 2$, $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$, 则 $P = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$, 故答案选A.

34 设函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi < \pi$), 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2$, $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ().

A. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$

B. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$

C. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$

D. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$

答案 A

解析

由 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2, f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 易知 $x = \frac{5\pi}{8}$ 为 $f(x)$ 的一条对称轴, 点 $\left(\frac{11\pi}{8}, 0\right)$ 为 $f(x)$ 的一个零点,

$$\text{则 } \frac{11\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = (2k+1)\frac{T}{4},$$

$$\text{又 } T = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\text{解得 } \omega = \frac{2}{3}(2k+1),$$

又 $\because \omega > 0$, $f(x)$ 的最小正周期大于 2π ,

$$\text{所以 } T = \frac{2\pi}{\omega} > 2\pi,$$

$$\therefore \omega < 1,$$

$$\therefore \omega = \frac{2}{3},$$

$$\text{从而 } \frac{5}{8}\pi \times \frac{2}{3} + 4 = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{又 } |\varphi| = \pi,$$

$$\text{所以 } \varphi = \frac{\pi}{12}.$$

故选A.