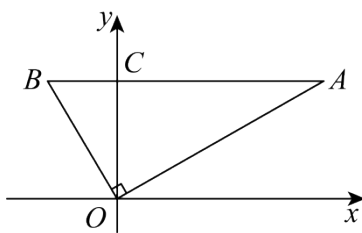


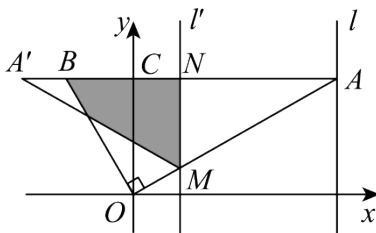
翻折面积问题

一、解答题

1. 在平面直角坐标系中， O 为原点， $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\angle OAB = 30^\circ$ ，斜边 $AB \parallel x$ 轴， AB 交 y 轴于点 C ， $AO = 6$ 。



图①



图②

- (1) 填空：如图①，点 A 的坐标为_____，点 B 的坐标为_____；
- (2) 如图②，过点 A 作 y 轴的平行线 l ，将 l 沿水平方向向左平移 t 个单位长度，得到 l' ，且 $0 < t < 3\sqrt{3}$ ， l' 分别交 AO ， AB 于点 M ， N ，将 $\triangle AMN$ 沿 l' 向左侧翻折得到 $\triangle A'MN$ ， $\triangle A'MN$ 与 $\triangle ABO$ 的重叠部分图形面积记为 S 。
- ① 当重叠图形为四边形时，试用含有 t 的式子表示 S ，并直接写出 t 的取值范围；
- ② 当 $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{11}{4}\sqrt{3}$ 时，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）。

【答案】(1) $(3\sqrt{3}, 3)$ ， $(-\sqrt{3}, 3)$

(2) ① $S = -\frac{5\sqrt{3}}{6}t^2 + 12t - 12\sqrt{3}$ ($2\sqrt{3} < t < 3\sqrt{3}$)；② $\frac{\sqrt{3}}{24} \leq S \leq \frac{12\sqrt{3}}{5}$

【分析】(1) 根据解直角三角形分别求得 OC 、 AC 、 BC ，即可求解；

(2) ①根据轴对称的性质, $A'N = AN = t$, 有 $\angle A' = \angle NAM = 30^\circ$, 且当 $A'N > \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$ 时, 重叠图形为四边形, 则 $MN = \frac{\sqrt{3}}{3}t$, $S_{\triangle A'MN} = \frac{MN \cdot NA'}{2}$, 然后记 BO 与 $A'M$ 交于点 D , 过 B 点向 $A'M$ 引垂线, 垂足为 E , 易证 $A'B = BD$, 根据直角三角形的性质表示出 $A'D = 2A'E$, $BE = A'B \cdot \sin 30^\circ$, 从而表示出 $S_{\triangle A'BD} = \frac{BE \cdot DA'}{2}$, 进而根据 $S = S_{\triangle A'MN} - S_{\triangle A'BD}$ 解答即可;

②分别求得当 $t = \frac{1}{2}$, $t = 2\sqrt{3}$ 时 S 的值, 以及 $2\sqrt{3} < t \leq \frac{11}{4}\sqrt{3}$ 时, S 的最大值, 即可解答.

【详解】(1) 解: $\because AB \parallel x$ 轴,

$$\therefore \angle ACO = \angle BCO = 90^\circ,$$

$$\because \angle OAB = 30^\circ, AO = 6,$$

$$\therefore OC = AO \sin 30^\circ = \frac{1}{2}AO = 3, \quad AC = AO \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore A(3\sqrt{3}, 3),$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ, \quad \angle OAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle COB \text{ 中, } BC = \frac{OC}{\tan \angle B} = \frac{OC}{\tan 60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore B(-\sqrt{3}, 3);$$

(2) 解: ①当 $0 < t < 3\sqrt{3}$ 时,

$$\text{在 Rt}\triangle AOB \text{ 中, } \angle AOB = 90^\circ, \quad \angle BAO = 30^\circ, \quad AO = 6, \quad \cos \angle BAO = \frac{AO}{AB},$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{3}, \quad \angle ABO = 60^\circ,$$

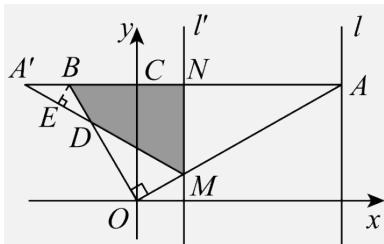
根据题意得, $\triangle AMN$ 和 $\triangle A'MN$ 关于直线 l' 对称,

则 $A'N = AN = t$, 有 $\angle A' = \angle NAM = 30^\circ$, 且当 $A'N > \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$ 时, 重叠图形为四边形,

$$\text{在 Rt}\triangle A'MN \text{ 中, } \angle MNA' = 90^\circ, \quad \angle NA'M = 30^\circ, \quad A'N = t, \quad \tan \angle NA'M = \frac{MN}{A'N},$$

$$\therefore MN = \frac{\sqrt{3}}{3}t, \quad S_{\triangle A'MN} = \frac{MN \cdot NA'}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}t \cdot t = \frac{\sqrt{3}}{6}t^2,$$

记 BO 与 $A'M$ 交于点 D , 过 B 点向 $A'M$ 引垂线, 垂足为 E , 如图,



在 $\triangle A'BD$ 中, $\angle A' = 30^\circ$, $A'B = AA' - AB = 2t - 4\sqrt{3}$,

$\therefore \angle BDA' = \angle ABO - \angle A' = 30^\circ$,

$\therefore A'B = BD$,

$\therefore A'D = 2A'E = 2A'B \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}t - 12$, $BE = A'B \cdot \sin 30^\circ = t - 2\sqrt{3}$,

$$\therefore S_{\triangle A'BD} = \frac{BE \cdot DA'}{2} = \frac{(t - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3}t - 12)}{2} = \sqrt{3}t^2 - 12t + 12\sqrt{3},$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{6}t^2 - (\sqrt{3}t^2 - 12t + 12\sqrt{3}) = -\frac{5\sqrt{3}}{6}t^2 + 12t - 12\sqrt{3}, \text{ 其中, } 2\sqrt{3} < t < 3\sqrt{3};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } t = \frac{1}{2} \text{ 时, } A'N = \frac{1}{2}, MN = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2} A'N \cdot MN = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{24};$$

同理, 当 $t = 2\sqrt{3}$ 时, $S = 2\sqrt{3}$;

当 $2\sqrt{3} < t \leq \frac{11}{4}\sqrt{3}$ 时, $S = -\frac{5\sqrt{3}}{6}t^2 + 12t - 12\sqrt{3}$, 此时抛物线开口向下, 对称轴为 $x = \frac{12\sqrt{3}}{5}$,

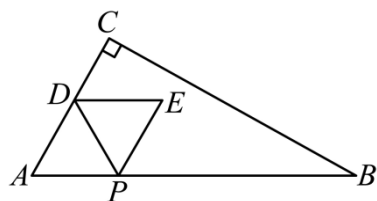
$$\therefore \frac{12\sqrt{3}}{5} - 2\sqrt{3} > \frac{11\sqrt{3}}{4} - \frac{12\sqrt{3}}{5},$$

$\therefore t = \frac{11\sqrt{3}}{4}$ 时 S 的值大于 $2\sqrt{3}$, $t = \frac{12\sqrt{3}}{5}$ 时, S 取得最大值, 最大值为

$$-\frac{5\sqrt{3}}{6} \times \left(\frac{12\sqrt{3}}{5}\right)^2 + 12 \times \frac{12\sqrt{3}}{5} - 12\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}}{5},$$

综上, 当 $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{11}{4}\sqrt{3}$ 时, S 的取值范围为 $\frac{\sqrt{3}}{24} \leq S \leq \frac{12\sqrt{3}}{5}$.

2. 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 8$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, 点 P 从点 A 出发以每秒 2 个单位长度的速度沿 AB 向终点 B 运动, 当点 P 不与点 A, B 重合时, 作 $\angle BPD = 120^\circ$, 边 PD 交折线 $AC - CB$ 于点 D , 点 A 关于直线 PD 的对称点为 E , 连接 ED , EP 得到 $\triangle PDE$. 设点 P 的运动时间为 t (秒).



- (1) 直接写出线段 PD 的长 (用含 t 的代数式表示);
- (2) 当点 E 落在边 BC 上时, 求 t 的值;
- (3) 设 $\triangle PDE$ 与 $\triangle ABC$ 重合部分图形的面积为 S , 求 S 与 t 之间的函数关系式, 并写出自变量 t 的取值范围.

【答案】(1) $PD = \begin{cases} 2t (0 < t \leq 2) \\ 8 - 2t (2 < t < 4) \end{cases}$,

(2) $t = \frac{4}{3}$,

(3) $S = \begin{cases} \sqrt{3}t^2 (0 < t \leq \frac{4}{3}) \\ -\frac{7\sqrt{3}}{2}t^2 + 12\sqrt{3}t - 8\sqrt{3} (\frac{4}{3} < t \leq 2) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} (2 < t < 4) \end{cases}$,

【分析】本题属于几何变换综合题, 考查了直角三角形 30° 角的性质, 三角形的面积等知识, 解题关键是学会用分类讨论解决问题, 属于中考压轴题.

(1) ①当 $0 < t \leq 2$ 时, 由 $\angle BPD = 120^\circ$, 可得 $\angle APD = 60^\circ$, 从而 $\triangle APD$ 是等边三角形, 即可得 $PD = AP = 2t$; ②当 $2 < t < 4$ 时, 由 $\angle B = 30^\circ, \angle PBD = 120^\circ$, 可得 $PD = PB = 8 - 2t$;

(2) 证明 $BP = 2PE$, 由此构建方程, 可得结论;

(3) 分三种情形: 当 $0 < t \leq \frac{4}{3}$ 时, 重叠部分是 $\triangle PDE$, 当 $\frac{4}{3} < t \leq 2$ 时, 重叠部分是四边形 $PDNM$, 当 $2 < t \leq 4$ 时, 重叠部分是 $\triangle PQD$, 分别求解即可.

【详解】(1) ①当 $0 < t \leq 2$ 时,

$$\because \angle BPD = 120^\circ,$$

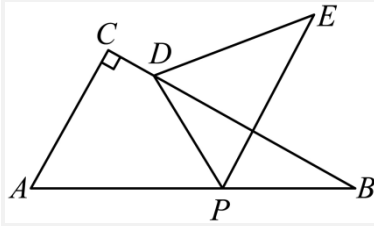
$$\therefore \angle APD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle APD$ 是等边三角形,

$$\therefore PD = AP = 2t,$$

②当 $2 < t < 4$ 时, 如图:



$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

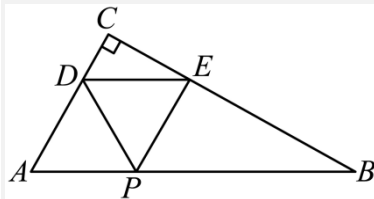
$$\because \angle BPD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle PDB = 30^\circ,$$

$$\therefore PD = PB = 8 - 2t;$$

综上所述, $PD = \begin{cases} 2t(0 < t \leq 2) \\ 8 - 2t(2 < t < 4) \end{cases},$

(2) 如图:



$$\because A, E \text{ 关于 } PD \text{ 对称},$$

$$\therefore \triangle PED \cong \triangle PAD,$$

$$\therefore PE = 2t, \angle APD = \angle EPD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BPE = 60^\circ,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BEP = 90^\circ,$$

$$\therefore BP = 2PE = 4t,$$

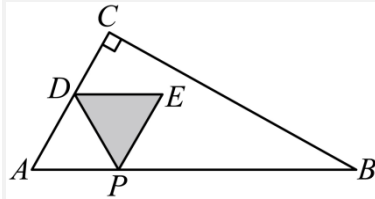
$$\therefore AB = AP + BP = 6t,$$

$$\because AB = 8,$$

$$\therefore 6t = 8,$$

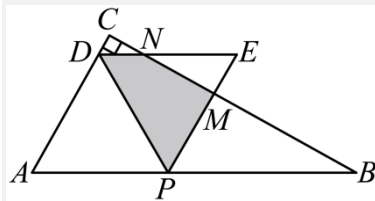
$$\therefore t = \frac{4}{3}$$

(3) 当 $0 < t \leq \frac{4}{3}$ 时, 如图:



$$\text{重叠部分是 } \triangle PED, S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2t)^2 = \sqrt{3}t^2$$

当 $\frac{4}{3} < t \leq 2$ 时, 如图



重叠部分是四边形 $PDNM$,

$$\because \angle B = 30^\circ, \angle BPE = 180^\circ - \angle APD - \angle EPD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BMP = 90^\circ = \angle EMN,$$

$$\therefore PM = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}(AP - AB) = \frac{1}{2}(8 - 2t) = 4 - t$$

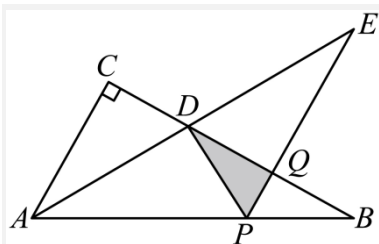
$$\therefore ME = PE - PM = 2t - (4 - t) = 3t - 4,$$

$$\because \angle E = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore MN = \sqrt{3}EM = \sqrt{3}(3t - 4)$$

$$\therefore S = S_{\triangle PDE} - S_{\triangle EMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2t)^2 - \frac{1}{2} \times (3t - 4) \times \sqrt{3}(3t - 4) = -\frac{7\sqrt{3}}{2}t^2 + 12\sqrt{3}t - 8\sqrt{3},$$

当 $2 < t \leq 4$ 时, 如图:



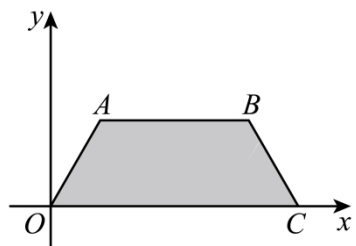
重叠部分是 $\triangle PQD$,

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2}(AB - AP) = 4 - t, DQ = \sqrt{3}(4 - t)$$

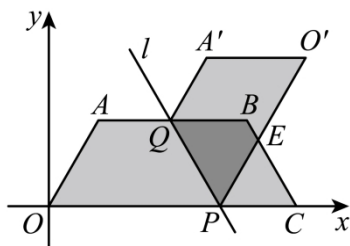
$$\therefore S = \frac{1}{2} \times (4 - t) \times \sqrt{3}(4 - t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$$

$$\text{综上所述, } S = \begin{cases} \sqrt{3}t^2 (0 < t \leq \frac{4}{3}) \\ -\frac{7\sqrt{3}}{2}t^2 + 12\sqrt{3}t - 8\sqrt{3} (\frac{4}{3} < t \leq 2) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} (2 < t < 4) \end{cases}$$

3. 将一个梯形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中, 点 $O(0,0)$, 点 $C(5,0)$, 顶点 A, B 都在第一象限, $AB \parallel OC$, $OA = BC = 2$, $\angle BCO = 60^\circ$.



图①



图②

(1) 填空: 如图①, 点 A 的坐标为____, 点 B 的坐标为____;

(2) 若点 P 在边 OC 上 (点 P 不与点 O, C 重合), 过点 P 作直线 $l \parallel BC$, 沿直线 l 折叠该纸片, 折叠后点 O 的对应点为 O' . 设 $OP = t$.

① 如图②, 若直线 l 与边 AB 相交于点 Q , 点 A 的对应点为 A' , 当折叠后四边形 $PO'A'Q$ 与梯形 $OABC$ 重叠部分为四边形时, $O'P$ 与 BC 相交于点 E . 试用含有 t 的式子表示线段 $O'E$, 并直接写出 t 的取值范围;

② 设折叠后重叠部分的面积为 S , 当 $\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{9}{2}$ 时, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

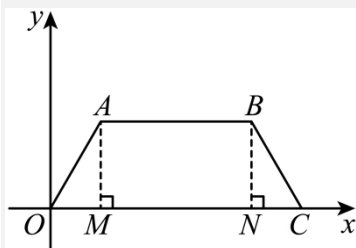
【答案】(1)(1,√3), (4,√3)

(2)① $O'E = 2t - 5$, $3 < t < 5$; ② $\frac{7\sqrt{3}}{16} \leq S \leq \sqrt{3}$

【分析】(1) 过点 A 作 $AM \perp x$ 轴, 过点 B 作 $BN \perp x$ 轴, 由等腰梯形的性质可得 $\angle AOC = \angle BCO = 60^\circ$, 通过解直角三角形即可求出点 A 、点 B 的坐标;

(2) ①寻找临界情形: 当 PO' 经过点 B 时为临界情形, 此时重叠部分为 $\triangle QPB$, 求出此时 $t = 3$, 当 $3 < t < 5$ 时, 重叠部分为四边形; 由平行线的性质和折叠性质可得 $\triangle EPC$ 是等边三角形, 得出 $EP = PC = 5 - t$, 最后利用 $O'E = O'P - EP$, 即可得出结果; ②当 $\frac{3}{2} \leq t < 2$ 时, $S_{\triangle QO'P}$ 即重叠部分的面积随着 t 的增大而增大, 当 $2 \leq t \leq 3$ 时, $S_{\triangle QPE}$ 不会随着 t 的变化而变化, 即 $S_{\triangle QPE} = \sqrt{3}$, 当 $3 < t \leq \frac{9}{2}$ 时, $S_{\text{梯形}BEPQ}$ 随着 t 的增大而减小, 所以重叠部分的最大值为 $S_{\triangle QPE} = \sqrt{3}$, 当 $t = \frac{3}{2}$ 时重叠部分面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{16}$, 当 $t = \frac{9}{2}$ 时重叠部分面积为 $\frac{7\sqrt{3}}{16}$, 所以重叠部分面积最小值为 $\frac{7\sqrt{3}}{16}$.

【详解】(1) 解: 如图所示, 过点 A 作 $AM \perp x$ 轴于 M , 过点 B 作 $BN \perp x$ 轴于 N ,



$\because AB \parallel OC$, $OA = BC = 2$, $\angle BCO = 60^\circ$,

$\therefore$ 梯形 $OABC$ 是等腰梯形,

$\therefore \angle AOC = \angle BCO = 60^\circ$,

$\therefore AM = AO \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $OM = AO \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$,

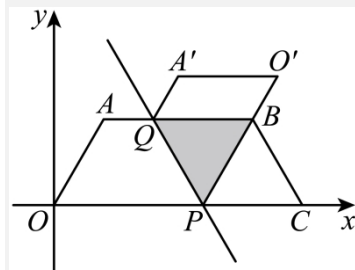
同理可得: $BN = \sqrt{3}$, $CN = 1$,

$\because$ 点 $C(5,0)$,

$\therefore ON = OC - CN = 5 - 1 = 4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(4, \sqrt{3})$.

(2) 解: ① 如图所示, 当 PO' 经过点 B 时, 此时重叠部分为 $\triangle QPB$,



$\because l \parallel BC$,

$\therefore \angle QPO = \angle BCO = 60^\circ$,

由折叠性质可得: $\angle QPO = \angle QPB = 60^\circ$,

$\therefore \angle BPC = 180^\circ - \angle QPO - \angle QPB = 60^\circ$,

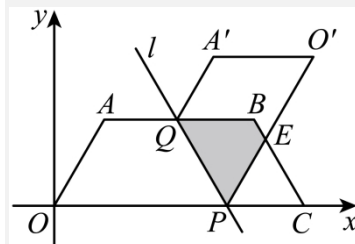
$\therefore \triangle BPC$ 是等边三角形,

$\therefore PC = BC = 2$,

$\therefore$ 此时 $t = OP = OC - PC = 3$,

$\because$ 点 P 在边 OC 上 (点 P 不与点 O, C 重合),

$\therefore$ 当 $3 < t < 5$ 时, 折叠后四边形 $PO'A'Q$ 与梯形 $OABC$ 重叠部分为四边形, 如图所示:



$\because OP = t, OC = 5$,

$\therefore PC = 5 - t$,

$\because l \parallel BC$,

$\therefore \angle QPO = \angle BCO = 60^\circ$,

由折叠性质可得: $\angle QPO = \angle QPO' = 60^\circ, O'P = OP = t$,

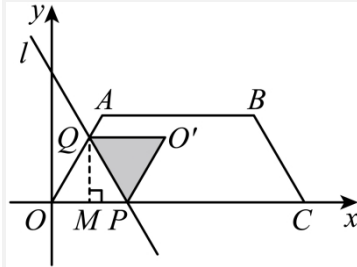
$\therefore \angle EPC = 180^\circ - \angle QPO - \angle QPO' = 60^\circ$,

$\therefore \triangle EPC$ 是等边三角形,

$$\therefore EP = PC = 5 - t,$$

$$\therefore O'E = O'P - EP = t - (5 - t) = 2t - 5, \quad 3 < t < 5;$$

②当 $\frac{3}{2} \leq t < 2$ 时, 重叠部分为 $\triangle QO'P$,



$$\because l \parallel BC,$$

$$\therefore \angle QPO = \angle BCO = \angle AOC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle QOP$ 是等边三角形,

由折叠性质可得: $\triangle QOP \cong \triangle QO'P$,

$$\because OP = t,$$

$\therefore$ 当 $\frac{3}{2} \leq t < 2$ 时, $S_{\triangle QO'P}$ 即重叠部分的面积随着 t 的增大而增大,

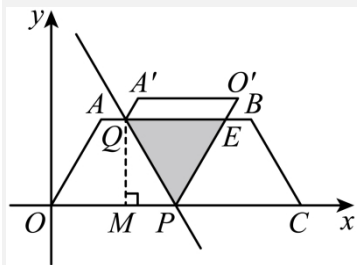
$$\therefore \text{当 } t = \frac{3}{2} \text{ 时, 即 } OQ = OP = QP = \frac{3}{2},$$

$$\text{过点 } Q \text{ 作 } QM \perp x \text{ 轴于 } M, \text{ 则 } QM = OQ \times \sin 60^\circ = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{3}{2} \text{ 时, } S_{\triangle QO'P} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}, \text{ 即重叠部分面积为 } \frac{9\sqrt{3}}{16},$$

$$\therefore \text{当 } \frac{3}{2} \leq t < 2 \text{ 时, } S_{\triangle QO'P} \geq \frac{9\sqrt{3}}{16},$$

当 $2 \leq t \leq 3$ 时, 重叠部分为 $\triangle QPE$, 如图所示:



$$\because l \parallel BC,$$

$$\therefore \angle QPO = \angle BCO = 60^\circ,$$

由折叠性质可得: $\angle QPO = \angle QPO' = 60^\circ$,

$$\because AB \parallel OC,$$

$$\therefore \angle EQP = \angle QPO = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle QPE$ 是等边三角形,

$$\because l \parallel BC, AB \parallel OC,$$

$\therefore$ 四边形 $QPCB$ 是平行四边形,

$$\therefore PQ = BC = 2,$$

$$\therefore PQ = QE = PE = 2,$$

过点 Q 作 $QM \perp x$ 轴于 M ,

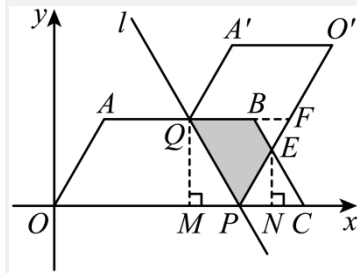
$$\text{则 } QM = QP \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle QPE} = \frac{1}{2} QE \times QM = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$\because AB \parallel OC$, $\triangle QPE$ 在平行线之间,

$\therefore$ 当 $2 \leq t \leq 3$ 时, $S_{\triangle QPE}$ 不会随着 t 的变化而变化, 即 $S_{\triangle QPE} = \sqrt{3}$,

当 $3 < t \leq \frac{9}{2}$ 时, 由 (1) 得: 重叠部分为梯形 $BEPQ$, 如图所示:



延长 AB 交 PO' 于点 F , 过点 E 作 $EN \perp x$ 轴于 N , 如图,

$$\because S_{\triangle FQP} = \sqrt{3}, \triangle FQP \text{ 是等边三角形},$$

$\therefore \triangle FBE$ 是等边三角形,

$$\text{由图可知: } S_{\text{梯形} BEPQ} = S_{\triangle FQP} - S_{\triangle FBE} = \sqrt{3} - S_{\triangle FBE},$$

$\therefore S_{\text{梯形} BEPQ} < \sqrt{3}$, 且随着 t 的增大, BE 在增大, 即 $S_{\triangle FBE}$ 在增大,

$\therefore$ 当 $3 < t \leq \frac{9}{2}$ 时, $S_{\text{梯形} BEPQ}$ 随着 t 的增大而减小,

$$\therefore \text{当 } t = \frac{9}{2} \text{ 时, } PC = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\because l \parallel BC, AB \parallel OC,$$

$\therefore$ 四边形 $QPCB$ 是平行四边形,

$$\therefore PQ = BC = 2,$$

$$\therefore QM = QP \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

由 (1) 得 $\triangle EPC$ 是等边三角形,

$$\therefore PC = EC = \frac{1}{2}, \quad EN = EC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

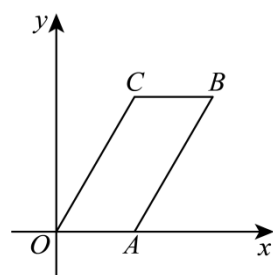
$$\therefore S_{\text{梯形}BEPQ} = S_{\text{平行四边形}QPCB} - S_{\triangle EPC} = PC \times QM - \frac{1}{2} PC \times EN = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{16},$$

$$\therefore \frac{7\sqrt{3}}{16} < \frac{9\sqrt{3}}{16},$$

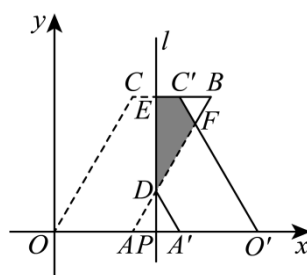
综上: 当 $\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{9}{2}$ 时, S 的最小值为 $\frac{7\sqrt{3}}{16}$, S 的最大值为 $\sqrt{3}$;

$$\therefore \text{当 } \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{9}{2} \text{ 时, } \frac{7\sqrt{3}}{16} \leq S \leq \sqrt{3}.$$

4. 将一个平行四边形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中, 点 $O(0,0)$, 点 $A(2,0)$, 点 B , C 在第一象限, 且 $OC = 4$, $\angle AOC = 60^\circ$.



图①



图②

(1) 填空: 如图①, 点 C 的坐标为 _____, 点 B 的坐标为 _____;

(2) 若 P 为 x 轴的正半轴上一动点, 过点 P 作直线 $l \perp x$ 轴, 沿直线 l 折叠该纸片, 折叠后点 O 的对应点 O' 落在 x 轴的正半轴上. 设 $OP = t$.

① 如图②, 若直线 l 与边 AB 相交于点 D , 与边 CB 相交于点 E , 点 A 的对应点为 A' , 点 C 的对应点为 C' , 当折叠后五边形 $A'O'C'ED$ 与 $\square OABC$ 重叠部分为四边形时, $O'C'$ 与 AB 相交于点 F . 试用含有 t 的式子表示线段 BF 的长, 并直接写出 t 的取值范围;

② 设折叠后重叠部分的面积为 S , 当 $\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{10}{3}$ 时, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

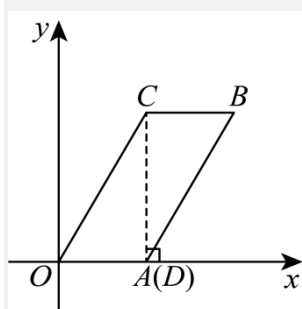
【答案】(1) $(2, 2\sqrt{3})$, $(4, 2\sqrt{3})$

(2) ① $BF = 6 - 2t$ ($2 < t < 3$); ② $\frac{2\sqrt{3}}{9} \leq S \leq \sqrt{3}$

【分析】(1) 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D , 可通过解直角三角形求出点 C 的横、纵坐标; 根据平行四边形对边平行且相等的性质, 可由点 C 的坐标推出点 B 的坐标.

(2) ① 因为 $OP = t$, 所以先确定 O' 的坐标; 再求出直线 $O'C'$ 和直线 AB 的解析式, 联立解析式得到交点 F 的坐标, 再结合点 B 的坐标计算 BF ; 因为重叠部分为四边形, 所以根据图形位置确定 t 的取值范围. ② 先分析该范围内重叠部分图形的形状, 结合 (2) ① 的结论, 利用面积公式表示出 S 关于 t 的函数; 再根据函数的性质, 求出在给定 t 范围内的最值.

【详解】(1) 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D ,



$\because OC = 4, \angle AOC = 60^\circ,$

$$\therefore OD = OC \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$$

$$\therefore A(2, 0),$$

$\therefore$ 点 D 与点 A 重合,

$$\therefore CD = OC \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore C(2, 2\sqrt{3}).$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = OC = 4, \text{ } B \text{ 的纵坐标和 } C \text{ 相等, 横坐标为 } OA + BC = 2 + 2 = 4,$$

$$\therefore B(4, 2\sqrt{3}).$$

(2) ① 由折叠性质得 $OO' = 2OP = 2t$, $OC \parallel AB$, $O'C' = OC = 4$,

$$\therefore O'(2t, 0), \quad C'(2t - 2, 2\sqrt{3}),$$

设直线 $O'C'$ 的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ，把 $O'(2t, 0)$ ， $C'(2t-2, 2\sqrt{3})$ ，代入得

$$\begin{cases} k_1 \cdot 2t + b_1 = 0 \\ k_1(2t-2) + b_1 = 2\sqrt{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_1 = -\sqrt{3} \\ b_1 = 2\sqrt{3}t \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 $O'C'$ 的解析式为 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}t$ ，

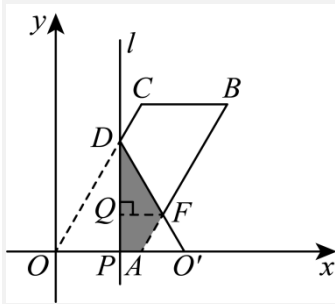
同理可得直线 AB 的解析式为 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ ，

联立 $O'C'$ 和 AB 的方程得交点 $F(t+1, \sqrt{3}(t-1))$ ，

$$\therefore BF = \sqrt{(4-(t+1))^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3}(t-1))^2} = 6-2t.$$

直线 $l: x=t$ 与 AB 、 CB 相交，且重叠部分为四边形时， $2 < t < 3$ ($BF > 0$ ，且 l 在 C 右侧、 B 左侧)。

(2) ② 当 $\frac{4}{3} \leq t \leq 2$ 时，过点 F 作 $FQ \perp l$ ，



$\therefore$ 直线 OC 与直线 AB 平行且经过原点，

$\therefore$ 直线 OC 解析式为 $y = \sqrt{3}x$ ，

由题意可得， $O'(2t, 0)$ ， $D(t, \sqrt{3}t)$ ，

$\therefore$ 可得直线 $O'D$ 的解析式为 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}t$ ，

联立 $O'D$ 和 AB 的方程得交点 $F(t+1, \sqrt{3}(t-1))$ ，

$\therefore Q(t, \sqrt{3}(t-1))$ ，

$\therefore$ 面积 $S = S_{\triangle DFQ} + S_{\text{四边形} QFAP}$

$$= \frac{1}{2}(t+1-t)[\sqrt{3}t - \sqrt{3}(t-1)] + \frac{1}{2}(t+1-t+2-t)\sqrt{3}(t-1)$$

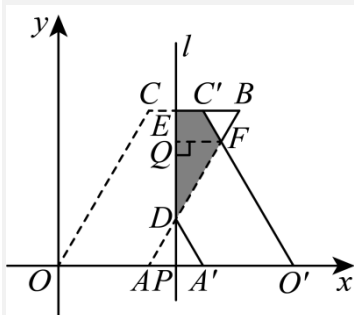
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2 + \sqrt{3} ,$$

此时开口向下，对称轴是直线 $t=2$ ，此时 S 随着 t 的增大而增大，

故最大值在 $t=2$ 处, $S_{\max}=\sqrt{3}$; 最小值在端点 $t=\frac{4}{3}$ 处, $S_{\min}=\frac{7\sqrt{3}}{9}$;

当 $2 < t < 3$ 时, 重叠部分是四边形, 过点 F 作 $FQ \perp l$,



同理可知 $C'(2t-2, 2\sqrt{3})$, $E(t, 2\sqrt{3})$, $F(t+1, \sqrt{3}(t-1))$, $Q(t, \sqrt{3}(t-1))$, $D(t, \sqrt{3}t-2\sqrt{3})$,

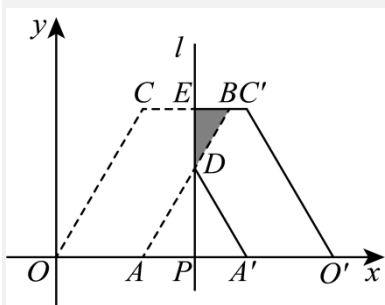
$$\begin{aligned} \text{面积 } S &= S_{\triangle DFQ} + S_{\text{四边形 } QFC'E} \\ &= \frac{1}{2}(t+1-t)\left[\sqrt{3}(t-1)-(\sqrt{3}t-2\sqrt{3})\right] + \frac{1}{2}\left[(t+1-t)+(2t-2-t)\right]\left[2\sqrt{3}-\sqrt{3}(t-1)\right] \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 2\sqrt{3}t - \sqrt{3} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2 + \sqrt{3}, \end{aligned}$$

此时开口向下, 对称轴是直线 $t=2$, 此时 S 随着 t 的增大而减小,

$$t=2 \text{ 时, } S=\sqrt{3}; \quad t=3 \text{ 时, } S=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

故此时, $\frac{\sqrt{3}}{2} < S < \sqrt{3}$;

当 $3 \leq t \leq \frac{10}{3}$ 时, 重叠部分是三角形,

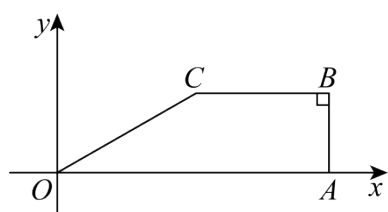


同理可知 $E(t, 2\sqrt{3})$, $B(4, 2\sqrt{3})$, $D(t, \sqrt{3}t - 2\sqrt{3})$,

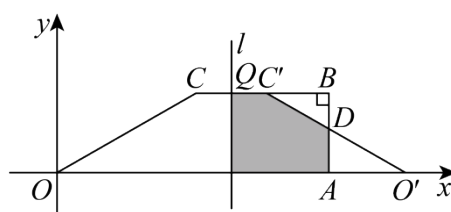
$$S = S_{\triangle BED} = \frac{\sqrt{3}}{2}(t-4)^2, \text{ 最小值在 } t = \frac{10}{3} \text{ 时为 } \frac{2\sqrt{3}}{9};$$

$$\therefore S \text{ 的范围是 } \frac{2\sqrt{3}}{9} \leq S \leq \sqrt{3}.$$

5. 在平面直角坐标系中, 梯形 $OABC$ 的位置如图所示. $BC \parallel OA$, $AB \perp BC$, 点 A 在 x 轴正半轴上, $OC = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $\angle AOC = 30^\circ$.



图①



图②

(1) 填空: 如图①, AB 的长为_____, 点 C 的坐标为_____.

(2) 若 P 为 x 轴正半轴上一动点, 过点 P 作直线 $l \perp x$ 轴, 沿直线 l 将梯形 $OABC$ 折叠, 折叠后点 O 的对应点 O' 落在 x 轴上, 点 C 的对应点为 C' . 设 $OP = t$.

① 如图②, 若直线 l 与 BC 边交于点 Q , 当折叠后四边形 $PO'C'Q$ 与梯形 $OABC$ 的重叠部分为五边形时, $O'C'$ 与 AB 交于点 D . 试用含 t 的式子表示出线段 $C'D$ 的长, 并直接写出 t 的取值范围.

② 设折叠后重叠部分的面积是 S , 当 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{11\sqrt{3}}{6}$ 时, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】(1) 1; $(\sqrt{3}, 1)$

(2) ① $C'D = 6 - \frac{4\sqrt{3}t}{3}$, $\sqrt{3} < t < \frac{3\sqrt{3}}{2}$; ② 当 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{11\sqrt{3}}{6}$ 时, S 的取值范围为

$$\frac{\sqrt{3}}{18} \leq S \leq \frac{5\sqrt{3}}{8}.$$

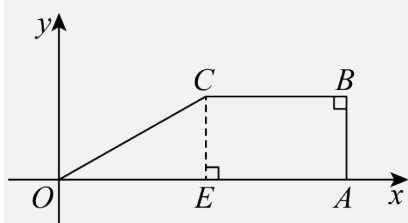
【分析】(1) 解直角三角形即可求解；

(2) ①利用折叠的性质求得 $O'A = 2t - 2\sqrt{3}$ ，在 $\text{Rt}\triangle AO'D$ 中，解直角三角形求得

$$O'D = \frac{4\sqrt{3}t}{3} - 4, \text{ 据此求解即可；}$$

②分两种情况讨论，利用二次函数的性质求解即可.

【详解】(1) 解：作 $CE \perp x$ 轴于点 E ,



$$\because BC \parallel OA, AB \perp BC,$$

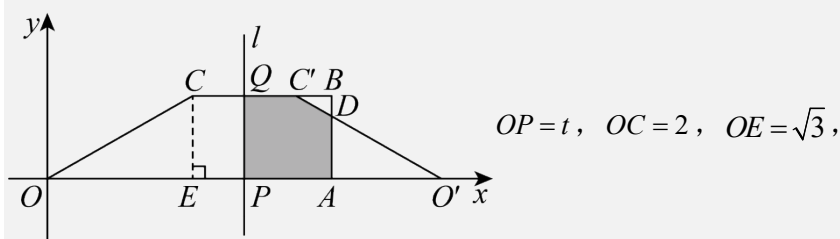
$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是矩形,

$$\because \angle AOC = 30^\circ, OC = 2,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}OC = 1, OE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AB = CE = 1, \text{ 点 } C \text{ 的坐标为 } (\sqrt{3}, 1);$$

(2) 解：①如图，



$$OP = t, OC = 2, OE = \sqrt{3},$$

$$\therefore O'P = t, O'C' = 2, PE = OP - OE = t - \sqrt{3}, \angle AO'D = \angle AOC = 30^\circ,$$

$$\because AE = CD = \sqrt{3},$$

$$\therefore AP = AE - PE = \sqrt{3} - (t - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - t,$$

$$\therefore O'A = O'P - AP = t - (2\sqrt{3} - t) = 2t - 2\sqrt{3},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AO'D \text{ 中, } O'D = \frac{AO'}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}t}{3} - 4,$$

$$\therefore C'D = O'C' - O'D = 2 - \left(\frac{4\sqrt{3}t}{3} - 4 \right) = 6 - \frac{4\sqrt{3}t}{3},$$

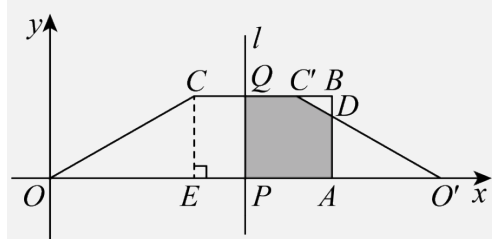
$$\therefore CQ = PE = t - \sqrt{3},$$

$$\therefore CC' = 2CQ = 2t - 2\sqrt{3},$$

$$\text{由题意得 } 0 < 2t - 2\sqrt{3} < \sqrt{3},$$

$$\text{解得 } \sqrt{3} < t < \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \sqrt{3} < t \leq \frac{11\sqrt{3}}{6} \text{ 时,}$$



$$\text{在 Rt}\triangle C'BD \text{ 中, } \angle BC'D = 30^\circ, C'D = \frac{4\sqrt{3}t}{3},$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}C'D = 3 - \frac{2\sqrt{3}t}{3}, \quad BC' = \sqrt{3}BD = 3\sqrt{3} - 2t,$$

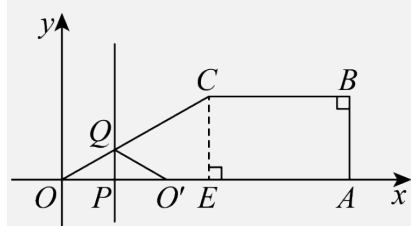
$$\therefore S = 1 \times (2\sqrt{3} - t) - \frac{1}{2} \times (3\sqrt{3} - 2t) \times \left(3 - \frac{2\sqrt{3}t}{3} \right)$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}t^2}{3} + 5t - \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore -\frac{2\sqrt{3}}{3} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ 时, } S \text{ 有最大值 } \frac{5\sqrt{3}}{8};$$

$$\text{当 } \frac{\sqrt{3}}{3} \leq t < \sqrt{3} \text{ 时, 如图,}$$



$$\therefore OP = t, \quad \angle POQ = 30^\circ,$$

$$\therefore O'P = t, \quad \angle PO'Q = 30^\circ,$$

$$\therefore PQ = O'P \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}t}{3},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times t \times \frac{\sqrt{3}t}{3} = \frac{\sqrt{3}t^2}{6},$$

$\therefore$ 当 $t > 0$ 时, S 随 t 的增大而增大,

$$\therefore \text{当 } t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } S \text{ 有最小值 } \frac{\sqrt{3}}{6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{18};$$

综上, 当 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{11\sqrt{3}}{6}$ 时, S 的取值范围为 $\frac{\sqrt{3}}{18} \leq S \leq \frac{5\sqrt{3}}{8}$.