

因式分解

1. 解下列不等式：

(1) $2x^2 - 3x - 2 > 0$.

(2) $-3x^2 + 6x - 2 > 0$.

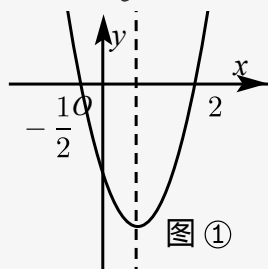
(3) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

(4) $x^2 - 2x + 2 > 0$.

【答案】 (1) $\left\{ x \mid x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 2 \right\}$.
(2) $\left\{ x \mid 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$.
(3) $\left\{ x \mid x = \frac{1}{2} \right\}$.
(4) $\mathbf{R}$.

【解析】 (1) 因为方程 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 根的判别式 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$,
所以方程 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

因为函数 $y = 2x^2 - 3x - 2$ 的图象是开口向上的抛物线, 如图①



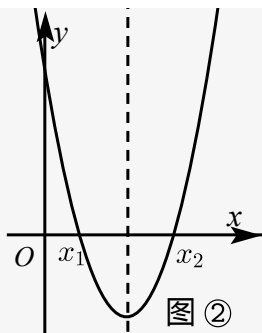
所以原不等式的解集是 $\left\{ x \mid x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 2 \right\}$.

(2) 不等式可化为 $3x^2 - 6x + 2 < 0$,

因为 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ 根的判别式 $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 12 > 0$,

所以方程 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根 $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$,

因为函数 $y = 3x^2 - 6x + 2$ 的图象是开口向上的抛物线, 如图②,



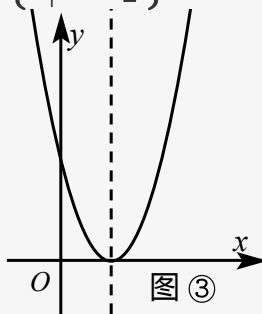
所以原不等式的解集是 $\left\{x \mid 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

(3) 因为方程 $4x^2 - 4x + 1 = 0$ 根的判别式 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$,

所以方程 $4x^2 - 4x + 1 = 0$ 有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, 又因为函数

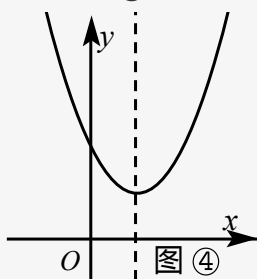
$y = 4x^2 - 4x + 1$ 的图象是开口向上的抛物线, 如图③, 所以原不等式的解集是

$\left\{x \mid x = \frac{1}{2}\right\}$.



(4) 因为方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 根的判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$,

所以方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 无解, 又因为函数 $y = x^2 - 2x + 2$ 的图象是开口向上的抛物线, 如图④, 所以原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.



【标注】 【知识点】一元二次不等式

2. 解下列不等式:

(1) $x^2 + 6x - 16 < 0$.

(2) $-x^2 + 2x + 8 < 0$.

(3) $x^2 - 3x - 1 > 0$.

(4) $2x^2 + 4x + 5 > 0$.

(5) $-4x^2 + 6x - 3 > 0$.

(6) $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$.

(7) $-9 < -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} < -3$.

【答案】(1) $(-8, 2)$

(2) $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

(3) $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$

(4) $\mathbf{R}$

(5) $\emptyset$

(6) $\left\{x \mid x = -\frac{2}{3}\right\}$

(7) $(-5, -3) \cup (1, 3)$

【解析】(1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

(5) 略

(6) 略

(7) 略

【标注】【知识点】一元二次不等式

3. 解下列不等式：

(1) $x^2 - 2x - 8 < 0$.

(2) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

(3) $x^2 - x + 2 < 0$.

【答案】 (1) $-2 < x < 4$.

(2) $x = 2$.

(3) $\emptyset$.

【解析】 (1) 不等式可化为 $(x+2)(x-4) < 0$, $\therefore$ 不等式的解是 $-2 < x < 4$.

(2) 不等式可化为 $(x-2)^2 \leq 0$, $\therefore$ 不等式的解是 $x = 2$.

(3) 不等式可化为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} < 0$, $\therefore$ 不等式解集为 $\emptyset$.

【标注】 【知识点】一元二次不等式

4. 解不等式 .

(1) $(x+2)(x-1) < 0$.

(2) $x^2 < 4$.

(3) $x^2 - 2x - 24 \geq 0$.

(4) $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$.

(5) $3x^2 - 2x - 1 < 0$.

(6) $2x^2 - x - 3 \geq 0$.

(7) $x^2 - 2x - 4 \leq 0$.

(8) $-2x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

【答案】 (1) $-2 < x < 1$.

(2) $-2 < x < 2$.

(3) $x \leq -4$ 或 $x \geq 6$.

(4) $2 \leq x \leq 3$.

(5) $-\frac{1}{3} < x < 1$.

$$(6) x \leq -1 \text{ 或 } x \geq \frac{3}{2}.$$

$$(7) 1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5}.$$

$$(8) \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \leq x \leq \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}.$$

【标注】 【知识点】一元二次不等式

5. 解下列不等式：

$$(1) (x - 7)(x + 6) > 0.$$

$$(2) 2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

$$(3) -2x^2 - x + 6 > 0.$$

$$(4) -x^2 - x - 1 < 0.$$

【答案】 (1) $x > 7$ 或 $x < -6$.

$$(2) -\frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

$$(3) -2 < x < \frac{3}{2}.$$

$$(4) \text{全体实数}.$$

【标注】 【知识点】一元二次不等式

6. 在实数范围内解下列不等式或方程.

$$(1) 3x^2 - x - 4 > 0.$$

$$(2) x^3 - 2x + 1 = 0.$$

【答案】(1) $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

$$(2) \left\{x \mid x = 1 \text{ 或 } \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

【解析】(1) 因式分解得 $(3x - 4)(x + 1) > 0$, $x < -1$ 或 $x > \frac{4}{3}$;

故 x 的解集为 $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

$$(2) x^3 - 2x + 1 = x^3 - 1 - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0,$$

$$\text{令 } x - 1 = 0 \text{ 得 } x = 1,$$

$$\text{令 } x^2 + x - 1 = 0 \text{ 得 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{故方程解集为 } \left\{x \mid x = 1 \text{ 或 } \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

【标注】 【知识点】一元二次不等式；等式的性质与方程的解集；因式分解

7. 解下列一元二次不等式.

$$(1) x^2 - 3x + 2 > 0.$$

$$(2) 2x^2 - x - 3 < 0.$$

$$(3) -x^2 + 7x - 10 > 0.$$

$$(4) -x^2 - 2x + 8 \geq 0.$$

【答案】(1) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

$$(2) \left(-1, \frac{3}{2}\right).$$

$$(3) (2, 5).$$

$$(4) [-4, 2].$$

【解析】(1) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

$$(2) \left(-1, \frac{3}{2}\right).$$

$$(3) (2, 5).$$

(4) $[-4, 2]$.

【标注】 【知识点】一元二次不等式

8. 解下列一元二次不等式 .

(1) $-3x^2 + x - 2 > 0$.

(2) $x^2 + 4x + 5 > 0$.

(3) $2x^2 + 7x + 3 < 0$.

(4) $x^2 + 5x - 3 > 0$.

【答案】 (1) 无解 .

(2) 全体实数 .

(3) $-3 < x < -\frac{1}{2}$.

(4) $x < \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$ 或 $x > \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$.

【解析】 (1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

【标注】 【知识点】一元二次不等式

9. 解下列含参不等式 .

(1) $x^2 - (a+1)x + a > 0$.

(2) $2x^2 - (6+a)x + 3a < 0$.

(3) $ax^2 - (a+1)x + 1 > 0$.

(4) $x^2 - ax + 1 > 0$.

【答案】 (1) $a > 1$ 时, $x \in (-\infty, 1) \cup (a, +\infty)$;

$a = 1$ 时, $x = \{x|x \neq 1, x \in \mathbf{R}\}$;

$a < 1$ 时, $x \in (-\infty, a) \cup (1, +\infty)$.

(2) $a > 6$ 时, $x \in \left(3, \frac{a}{2}\right)$;

$a = 6$ 时, $x \in \emptyset$;

$a < 6$ 时, $x \in \left(\frac{a}{2}, 3\right)$.

(3) $a = 0$ 时, $x \in (-\infty, 1)$,

$a \neq 0$ 时, ① $a \in (-\infty, 0)$ 时, $x \in \left(\frac{1}{a}, 1\right)$

② $a \in (0, 1)$ 时, $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$

③ $a = 1$ 时, $x = \{x|x \neq 1, x \in \mathbf{R}\}$

④ $a \in (1, +\infty)$ 时, $x \in \left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (1, +\infty)$.

(4) $a \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ 时,

$x \in \left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$

$a = 2$ 时, $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$a = -2$ 时, $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ $a \in (-2, 2)$ 时, $x \in \mathbf{R}$.

【解析】 (1) $a > 1$ 时, $x \in (-\infty, 1) \cup (a, +\infty)$;

$a = 1$ 时, $x = \{x|x \neq 1, x \in \mathbf{R}\}$;

$a < 1$ 时, $x \in (-\infty, a) \cup (1, +\infty)$.

(2) $a > 6$ 时, $x \in \left(3, \frac{a}{2}\right)$;

$a = 6$ 时, $x \in \emptyset$;

$a < 6$ 时, $x \in \left(\frac{a}{2}, 3\right)$.

(3) $a = 0$ 时, $x \in (-\infty, 1)$,

$a \neq 0$ 时, ① $a \in (-\infty, 0)$ 时, $x \in \left(\frac{1}{a}, 1\right)$

② $a \in (0, 1)$ 时, $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$

③ $a = 1$ 时, $x = \{x|x \neq 1, x \in \mathbf{R}\}$

④ $a \in (1, +\infty)$ 时, $x \in \left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (1, +\infty)$.

$$(4) a \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \text{ 时, } x \in \left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$$

$$a = 2 \text{ 时, } x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$a = -2 \text{ 时, } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \quad a \in (-2, 2) \text{ 时, } x \in \mathbf{R}.$$

【标注】 【知识点】一元二次不等式

10. 解下列不等式.

$$(1) 2 + 3x - 2x^2 > 0.$$

$$(2) x(3 - x) \leq x(x + 2) - 1.$$

$$(3) x^2 - 2x + 3 > 0.$$

$$(4) -1 < x^2 + 2x - 1 \leq 2.$$

【答案】 (1) $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}.$

(2) $\left\{x \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq 1\right\}.$

(3) $\mathbf{R}.$

(4) $\{x \mid -3 \leq x < -2 \text{ 或 } 0 < x \leq 1\}.$

【解析】 (1) 原不等式可化为 $2x^2 - 3x - 2 < 0$,

即 $(2x + 1)(x - 2) < 0$,

故原不等式的解集是 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}.$

(2) 原不等式可化为 $2x^2 - x - 1 \geq 0$,

即 $(2x + 1)(x - 1) \geq 0$,

故原不等式的解集是 $\left\{x \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq 1\right\}.$

(3) 因为 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$,

故原不等式的解集是 $\mathbf{R}.$

(4) 原不等式等价于 $\begin{cases} x^2 + 2x - 1 > -1 \\ x^2 + 2x - 1 \leq 2 \end{cases},$

$$\text{即} \begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

由①得 $x(x+2) > 0$,

所以 $x < -2$ 或 $x > 0$,

由②得: $(x+3)(x-1) \leq 0$,

所以 $-3 \leq x \leq 1$,

所以原不等式的解集是 $\{x | -3 \leq x < -2 \text{ 或 } 0 < x \leq 1\}$.

【标注】 【知识点】一元二次不等式

11. 解下列关于 x 的不等式.

(1) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

(2) $-x^2 + 4x - 5 > 0$.

(3) $x^2 - ax + a - 1 \leq 0$.

【答案】 (1) $[-1, 3]$.

(2) $\emptyset$.

(3) ①当 $a < 2$ 时,

解集为 $[a-1, 1]$,

②当 $a > 2$ 时,

解集为 $[1, a-1]$,

③当 $a = 2$ 时,

解集为 $\{1\}$.

【解析】 (1) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$,

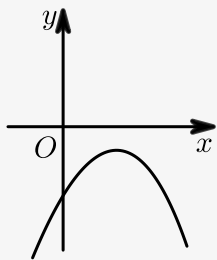
$$(x-3)(x+1) \leq 0,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3,$$

$\therefore$ 解集为 $[-1, 3]$.

(2) $-x^2 + 4x - 5 > 0$,

$$\Delta = 16 - 20 < 0,$$



$\therefore$ 无解, $\emptyset$.

$$(3) \quad x^2 - ax + a - 1 \leq 0,$$

$$[x - (a - 1)](x - 1) \leq 0,$$

① 当 $a - 1 < 1$, 即 $a < 2$ 时,

解集为 $[a - 1, 1]$,

② 当 $a - 1 > 1$, 即 $a > 2$ 时,

解集为 $[1, a - 1]$,

③ 当 $a - 1 = 1$ 即 $a = 2$ 时,

解集为 $\{1\}$.

【标注】 【知识点】一元二次不等式

12. 解不等式.

$$(1) \quad 3x^2 - 7x + 2 < 0.$$

$$(2) \quad -x^2 - x + 2 \leq 0.$$

【答案】 (1) $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < 2\right\}$.

(2) $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$.

【解析】 (1) $3x^2 - 7x + 2 < 0$

则 $(x - 2)(3x - 1) < 0$,

$\therefore \frac{1}{3} < x < 2$,

即不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < 2\right\}$.

$$(2) -x^2 - x + 2 \leq 0$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x-1)(x+2) \geq 0$$

$$\text{则 } x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 1,$$

$$\text{所以不等式的解集为 } \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 1\}.$$

【标注】 【知识点】一元二次不等式

13. 解下列不等式：

$$(1) 2x^2 - 7x - 15 > 0.$$

$$(2) -2x^2 + 12x - 19 > 0.$$

$$(3) -4x^2 - 2x + 1 > 0.$$

$$(4) 4x^2 + 12x + 9 > 0.$$

【答案】 (1) $x < -\frac{3}{2}$ 或 $x > 5$.

(2) 无解.

(3) $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

(4) $x \neq -\frac{3}{2}$.

【解析】 (1) $2x^2 - 7x - 15 = (2x+3)(x-5)$. 所以, 不等式的解是 $x < -\frac{3}{2}$ 或 $x > 5$.

(2) 原不等式代为 $2x^2 - 12x + 19 < 0$. 因为 $2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1 > 0$. 所以不等式无解.

(3) 原不等式化为 $4x^2 + 2x - 1 < 0$. 因为 $\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20 > 0$.

方程 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ 的根是 $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$

所以, 不等式的解是 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

(4) 原不等式化为 $(2x+3)^2 > 0$; 所以, 不等式的解是 $x \neq -\frac{3}{2}$.

14. 解下列不等式：

(1) $2x^2 + 7x + 3 > 0$.

(2) $-x^2 + 8x - 3 > 0$.

(3) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$.

(4) $-4x^2 + 18x - \frac{81}{4} \geq 0$.

(5) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 > 0$.

(6) $-2x^2 + 3x - 2 < 0$.

【答案】(1) $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2} \text{ 或 } x < -3\right\}$.

(2) $\left\{x \mid 4 - \sqrt{13} < x < 4 + \sqrt{13}\right\}$.

(3) $\{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$.

(4) $\left\{x \mid x = \frac{9}{4}\right\}$.

(5) $\emptyset$.

(6) $\mathbf{R}$.

【解析】(1) 因为 $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 > 0$, 所以方程 $2x^2 + 7x + 3 = 0$,

有两个不等实根 $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$,

又二次函数 $y = 2x^2 + 7x + 3$ 的图像开口向上, 所以原不等式的解集为

$\left\{x \mid x > -\frac{1}{2} \text{ 或 } x < -3\right\}$.

(2) 因为 $\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 52 > 0$, 所以方程 $-x^2 + 8x - 3 = 0$ 有两个不等实根

$x_1 = 4 - \sqrt{13}$, $x_2 = 4 + \sqrt{13}$,

又二次函数 $y = -x^2 + 8x - 3$ 的图像开口向下, 所以原不等式的解集为

$\left\{x \mid 4 - \sqrt{13} < x < 4 + \sqrt{13}\right\}$.

(3) 原不等式可化为 $(x - 5)(x + 1) \leq 0$, 所以原不等式的解集为 $\{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$.

(4)

原不等式可化为 $\left(2x - \frac{9}{2}\right)^2 \leq 0$ ，所以原不等式的解集为 $\left\{x \mid x = \frac{9}{4}\right\}$ 。

(5) 原不等式可化为 $x^2 - 6x + 10 < 0$ ，因为 $\Delta = (-6)^2 - 40 = -4 < 0$ ，所以方程 $x^2 - 6x + 10 = 0$ 无实根。又二次函数 $y = x^2 - 6x + 10$ 的图像开口向上，所以原不等式的解集为 $\emptyset$ 。

(6) 原不等式可化为 $2x^2 - 3x + 2 > 0$ ，因为 $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0$ ，所以方程 $2x^2 - 3x + 2 = 0$ 无实根。又二次函数 $y = 2x^2 - 3x + 2$ 的图像开口向上，所以原不等式的解集为 $\mathbf{R}$ 。

【标注】 【知识点】一元二次不等式

15. 解下列不等式：

(1) $x^2 - x - 42 > 0$ ；

(2) $x^2 + 4x + 5 > 0$ ；

【答案】 (1) $x > 7$ 或 $x < -6$ 。

(2) 全体实数。

【解析】 (1) $(x - 7)(x + 6) > 0 \Rightarrow x > 7$ 或 $x < -6$ 。

(2) $\because x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ 恒成立，故不等式解集为全体实数。

【标注】 【知识点】一元二次不等式

16. 求下列不等式的解集：

(1) $(x - 1)(x + 3) > 0$ 。

(2) $(x - 2)(x + 4) < 0$ 。

(3) $(1 - x)(x + 4) \geq 0$ 。

(4) $(3 + x)(4 - x) \leq 0$ 。

(5) $x^2 + 5x + 4 > 0$ 。

(6) $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$ 。

(7) $x^2 + 4x + 4 > 0$.

(8) $x^2 + 3x + 5 > 0$.

(9) $x^2 + x + 4 < 0$.

(10) $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

(11) $x^2 + 4x + 1 \geq 0$.

(12) $-x^2 + 3x - 1 \leq 0$.

【答案】 (1) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

(2) $(-4, 2)$.

(3) $[-4, 1]$.

(4) $(-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$.

(5) $(-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$.

(6) $[-1, 5]$.

(7) $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

(8) $\mathbf{R}$.

(9) $\emptyset$.

(10) $\{x|x = 2\}$.

(11) $(-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty)$

(12) $\left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

【解析】 (1) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

(2) $(-4, 2)$.

(3) $[-4, 1]$.

(4) $(-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$.

(5) $(-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$.

(6) $[-1, 5]$.

(7) $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

(8) $\mathbf{R}$.

(9) $\emptyset$.

(10) $\{x|x=2\}$.

(11) $(-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty)$.

(12) $(-\infty, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

【标注】 【知识点】一元二次不等式

17. 求下列含参不等式的解集：

(1) $x^2 - 2ax - 3a^2 < 0$.

(2) $2x^2 - (6 + a)x + 3a \leq 0$.

(3) $\frac{1}{k}x^2 - k \geq 0$.

(4) $x^2 - ax + 1 > 0$.

【答案】 (1) ①当 $a < 0$ 时，解集为 $\{x|3a < x < -a\}$ ；

②当 $a = 0$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow x^2 < 0$ ，显然解集为 $\emptyset$ ；

③当 $a > 0$ 时，解集为 $\{x| -a < x < 3a\}$.

(2) ① $a > 6$ 时， $[3, \frac{a}{2}]$ ，

② $a = 6$ 时， $\{3\}$ ，

③ $a < 6$ 时， $[\frac{a}{2}, 3]$.

(3) 当 $k > 0$ 时，不等式的解集为 $\{x|x \geq k \text{ 或 } x \leq -k\}$ ；

当 $k < 0$ 时，不等式的解集为 $\{x|k \leq x \leq -k\}$.

(4) ① $a \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ 时，

$$x \in \left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right),$$

$$\textcircled{2} a = 2 \text{ 时}, x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty),$$

$$\textcircled{3} a = -2 \text{ 时}, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty),$$

$$\textcircled{4} a \in (-2, 2) \text{ 时}, x \in \mathbf{R}.$$

【解析】 (1) 原不等式 $\Leftrightarrow (x+a)(x-3a) < 0$.

分三种情况讨论:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } a < 0 \text{ 时}, \text{ 解集为 } \{x | 3a < x < -a\};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } a = 0 \text{ 时}, \text{ 原不等式 } \Leftrightarrow x^2 < 0, \text{ 显然解集为 } \emptyset;$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } a > 0 \text{ 时}, \text{ 解集为 } \{x | -a < x < 3a\}.$$

$$(2) \textcircled{1} a > 6 \text{ 时}, \left[3, \frac{a}{2}\right],$$

$$\textcircled{2} a = 6 \text{ 时}, \{3\},$$

$$\textcircled{3} a < 6 \text{ 时}, \left[\frac{a}{2}, 3\right].$$

$$(3) \text{ 由 } \frac{1}{k}x^2 - k \geq 0, \text{ 得 } \frac{1}{k}(x^2 - k^2) \geq 0, \text{ 即 } \frac{1}{k}(x-k)(x+k) \geq 0,$$

$$\text{当 } k < 0 \text{ 时}, \text{ 即解 } (x-k)(x+k) \geq 0, \text{ 解得 } x \geq k \text{ 或 } x \leq -k.$$

$$\text{当 } k > 0 \text{ 时}, \text{ 即解 } (x-k)(x+k) \leq 0, \text{ 解得 } k \leq x \leq -k.$$

$$\text{综上, 当 } k > 0 \text{ 时}, \text{ 不等式的解集为 } \{x | x \geq k \text{ 或 } x \leq -k\};$$

$$\text{当 } k < 0 \text{ 时}, \text{ 不等式的解集为 } \{x | k \leq x \leq -k\}.$$

$$(4) \textcircled{1} a \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \text{ 时}, x \in \left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right),$$

$$\textcircled{2} a = 2 \text{ 时}, x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty),$$

$$\textcircled{3} a = -2 \text{ 时}, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty),$$

$$\textcircled{4} a \in (-2, 2) \text{ 时}, x \in \mathbf{R}.$$

【标注】 【知识点】一元二次不等式; 含字母系数的不等式

18. 解下列关于 x 的不等式.

$$(1) x^2 - 2x - 8 \leq 0.$$

$$(2) x^2 + 4x + 5 > 0.$$

$$(3) x^2 \leq ax.$$

【答案】 (1) $\{x|-2 \leq x \leq 4\}$.

(2) $\mathbf{R}$.

(3) 当 $a = 0$ 时, 解集为 $\{0\}$;

当 $a > 0$ 时, 解集为 $\{x|0 \leq x \leq a\}$;

当 $a < 0$ 时, 解集为 $\{x|a \leq x \leq 0\}$.

【解析】 (1) 由 $x^2 - 2x - 8 \leq 0$, 得 $(x-4)(x+2) \leq 0$,

所以 $-2 \leq x \leq 4$,

所以不等式的解集为 $\{x|-2 \leq x \leq 4\}$.

(2) 因为 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1$,

所以不等式 $x^2 + 4x + 5 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

(3) 由 $x^2 \leq ax$, 得 $x^2 - ax = x(x-a) \leq 0$,

所以当 $a = 0$ 时, $x = 0$;

当 $a > 0$ 时, $0 \leq x \leq a$;

当 $a < 0$ 时, $a \leq x \leq 0$;

所以当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{0\}$;

当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x|0 \leq x \leq a\}$;

当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x|a \leq x \leq 0\}$.

【标注】 【知识点】解不等式中的分类讨论；含字母系数的不等式；一元二次不等式

19. 求下列关于 x 的不等式的解集 .

(1) $3x^2 - 7x > 10$.

(2) $(x^2 - 4)(x - 6)^2 \leq 0$.

(3) $\frac{x+5}{(x-1)^2} \geq 2$.

(4) $|x| + |2x - 1| > 2$.

【答案】 (1) $\left\{x \mid x > \frac{10}{3} \text{ 或 } x < -1\right\}$.

$$(2) \{x | -2 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x = 6\}.$$

$$(3) \left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leq 3\right\}.$$

$$(4) \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{3}\}.$$

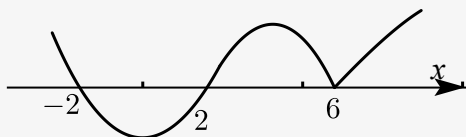
【解析】(1) 由 $3x^2 - 7x > 10$ 可得: $(3x - 10)(x + 1) > 0$,

解得 $x > \frac{10}{3}$ 或 $x < -1$,

$\therefore$ 不等式解集为 $\left\{x \mid x > \frac{10}{3} \text{ 或 } x < -1\right\}$.

$$(2) \because (x^2 - 4)(x - 6)^2 = (x - 2)(x + 2)(x - 6)^2 \leq 0,$$

由穿针引线法如图

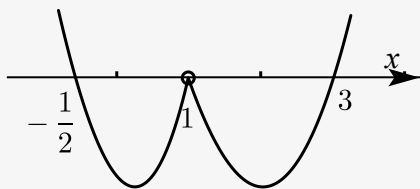


$\therefore$ 不等式解集为 $\{x | -2 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x = 6\}$.

$$(3) \text{ 由 } \frac{x+5}{(x-1)^2} \geq 2 \text{ 可得, 即 } \frac{x+5}{(x-1)^2} - 2 = \frac{(3-x)(2x+1)}{(x-1)^2} \geq 0,$$

$$\text{等价于 } \begin{cases} (x-3)(2x+1)(x-1)^2 \leq 0, \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

由穿针引线法如图



$\therefore$ 不等式解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leq 3\right\}$.

$$(4) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, 不等式化为 } -x + 1 - 2x > 2, \text{ 解得 } x < -\frac{1}{3},$$

$$\text{当 } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时, 不等式化为 } x + 1 - 2x > 2, \text{ 解为空集,}$$

$$\text{当 } x > \frac{1}{2} \text{ 时, 不等式化为 } x + 2x - 1 > 0, \text{ 解得 } x > \frac{1}{3},$$

综上所述, 不等式解集为 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{3}\}$.

【标注】【知识点】分式不等式; 解不等式中的分类讨论; 含绝对值的不等式; 一元二次不等式; 高次不等式