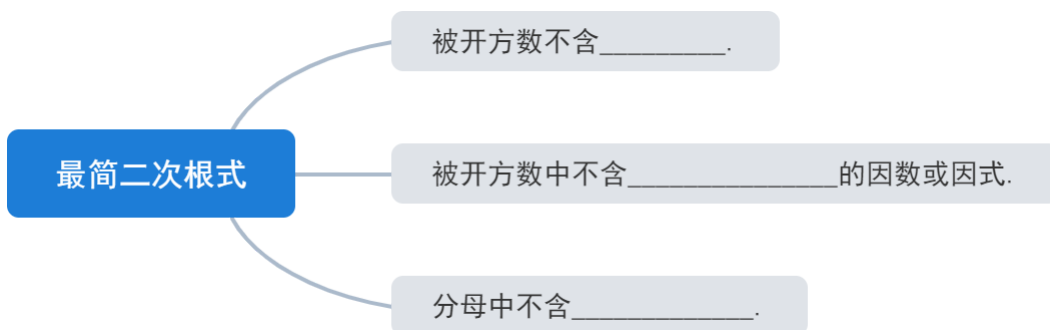


第2讲二次根式的运算

一、最简二次根式



【备注】如果一个二次根式满足下列几个特点：

- ① 被开方数不含分母．
- ② 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式．
- ③ 分母中不含二次根式．

我们把这个二次根式叫做**最简二次根式**．

- ① 在二次根式的被开方数中，只要含有分数或小数就不是最简二次根式．
- ② 在二次根式的被开方数中，有幂指数等于或大于2的因式或因数就不是最简二次根式．
- ③ 一般地，二次根式运算的结果应化为最简二次根式，并且分母中不含二次根式．

🍌 举个“栗”子

栗子1

1. 下列二次根式： $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ， $\sqrt{0.5a}$ ， $-2\sqrt{a^2b}$ ， $\sqrt{x^2+y^2}$ 中，是最简二次根式的有（ ）．
- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【备注】根据概念进行辨析

【答案】A

【解析】 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为最简二次根式．

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sqrt{0.5a} = \sqrt{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{2a}}{2}.$$

【标注】【知识点】最简二次根式

2. 下列根式中，不是最简二次根式的是（ ）.

A. $\sqrt{10}$

B. $\sqrt{8}$

C. $\sqrt{6}$

D. $\sqrt{2}$

【备注】重点考察数字问题，注意不含开方开得尽的数

【答案】B

【解析】因为 $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，因此 $\sqrt{8}$ 不是最简二次根式.

【标注】【知识点】最简二次根式

二、分母有理化

分母有理化方法	示例
利用 $(\sqrt{a})^2 = a$	$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$ (其中 $b \geq 0, a > 0$) .
利用平方差公式	$\frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{m\sqrt{a} + m\sqrt{b}}{a - b}$
类似分式的“约分”	$\frac{ab}{\sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}} = a\sqrt{b} (b > 0)$

【备注】二次根式分母有理化：二次根式的运算中，最后结果要求分母中不含二次根式. 把分母中的根号化去的过程称为分母有理化.

具体过程：

① $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$ (其中 $b \geq 0, a > 0$) .

实质是利用 $(\sqrt{a})^2 = a$ ，将二次根式分母有理化.

② $\frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{m\sqrt{a} + m\sqrt{b}}{a - b}$.

实质是利用平方差公式 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ ，将二次根式分母有理化.

③ 也可以通过类似分式的“约分”进行分母有理化，如 $\frac{ab}{\sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}} = a\sqrt{b} (b > 0)$

3. 化简下列二次根式 .

二次根式	$\sqrt{24}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{8}{9}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{1.5}$	$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$	$\sqrt{0.1y}$	$\sqrt{\frac{ab}{2}}$	$\frac{5n}{3\sqrt{n}}$
化简											

【备注】 涉及各类常见分母有理化的题型，可根据学生作答，进行针对性的强化

【答案】 $2\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{15}}{5}$, $\frac{\sqrt{10}}{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{10y}}{10}$, $\frac{\sqrt{2ab}}{2}$, $\frac{5\sqrt{n}}{3}$.

【解析】 略 .

【标注】 【知识点】二次根式化简求值

栗子3

4. 化简下列各式：

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ (2) \quad & \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ (3) \quad & \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ (4) \quad & \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

【备注】 分母为多项式，与平方差公式有一定结合

【答案】 (1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
 (2) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$
 (3) $\sqrt{5}-2$
 (4) $5+2\sqrt{6}$

【标注】 【知识点】分母、分子有理化

5. 将下列式子分母有理化：

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\sqrt{2}}{-2\sqrt{3}+\sqrt{5}} . \\ (2) \quad & \frac{\sqrt{7}-3}{2\sqrt{7}+3} . \end{aligned}$$

【备注】分母为多项式，注意化简过程中分子计算不要出错

【答案】(1) $\frac{-\sqrt{10}-2\sqrt{6}}{7}$.

(2) $\frac{23-9\sqrt{7}}{19}$.

【解析】(1)
$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{-2\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+2\sqrt{3})} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{\sqrt{10}+2\sqrt{6}} \\ &= \frac{5-12}{-\sqrt{10}-2\sqrt{6}} \\ &= \frac{-7}{-\sqrt{10}-2\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{7}-3}{2\sqrt{7}+3} \\ &= \frac{(\sqrt{7}-3)(2\sqrt{7}-3)}{(2\sqrt{7}+3)(2\sqrt{7}-3)} \\ &= \frac{14-9\sqrt{7}+9}{28-9} \\ &= \frac{23-9\sqrt{7}}{19}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

三、二次根式的加减

同类二次根式	把几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式就叫做 <u>同类二次根式</u> 。
二次根式的加减	二次根式的加减运算实际上就是先把每个二次根式化成 <u>最简二次根</u> ，再合并 <u>同类二次根式</u> 。
加减步骤 " <u>一化二找三合并</u> "。	① 一化：将每个二次根式化为最简二次根式； ② 二找：找出同类二次根式； ③ 三合并：合并二次根式

【备注】**同类二次根式**：把几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式就叫做同类二次根式。

① 同类二次根式类似于整式中的同类项，如 $3\sqrt{2}$ 和 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 是同类二次根式。

② 几个同类二次根式在没有化简之前，被开方数完全可以互不相同，如 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ， $\sqrt{8}$ ， $\sqrt{18}$ 都是同类二次根式。

③ 判断两个二次根式是否是同类二次根式，首先要将它们化为最简二次根式，然后再看被开方数是否相同。

二次根式的加减：

二次根式的加减运算实际上就是先把每个二次根式化成最简二次根式，再合并同类二次根式。

二次根式的加减步骤：“一化二找三合并”。

① 一化：将每个二次根式化为最简二次根式；

② 二找：找出同类二次根式；

③ 三合并：合并二次根式。

注意：

① 二次根式加减混合运算的实质就是合并同类二次根式，不是同类二次根式不能合并。
如 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 是最简二次根式，不能合并。

② 二次根式进行加减运算时，根号外的系数因式必须为假分数形式，如 $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ ，不能写成 $1\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 的形式。

③ 合并同类二次根式后，若系数为多项式，需添加括号，如 $(a+b)\sqrt{a}$ 。

1. 同类二次根式

栗子4

6. 下列根式不能与 $\sqrt{48}$ 合并的是（ ）。

A. $\sqrt{0.12}$

B. $\sqrt{18}$

C. $\sqrt{1\frac{1}{3}}$

D. $-\sqrt{75}$

【备注】 $\sqrt{48}$ 要先化简为最简二次根式再化简各选项

【答案】B

【解析】 $\because \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ，

$$\sqrt{0.12} = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

$$\sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$-\sqrt{75} = -5\sqrt{3},$$

$\therefore \sqrt{0.12}$ 、 $\sqrt{1\frac{1}{3}}$ 、 $-\sqrt{75}$ 与 $\sqrt{48}$ 是同类二次根式，能够进行合并。

故选：B。

【标注】【知识点】同类二次根式

7. 已知 $\sqrt{12}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2a-1}$ 是同类二次根式，则 a 的值是_____.

【备注】同类二次根式的概念，注意不能直接代入12计算

【答案】2

【解析】因为 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，且 $\sqrt{12}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2a-1}$ 是同类二次根式，
所以 $2a-1=3$ ，
解得 $a=2$ 。

【标注】【知识点】根据同类二次根式的定义求参数

8. 当 $a =$ _____时，最简二次根式 $\sqrt{2a-1}$ 与 $-\sqrt{3a-7}$ 可以合并。

【备注】被开方数对应相等即可

【答案】6

【解析】 $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{2a-1}$ 与 $-\sqrt{3a-7}$ 可以合并，
 $\therefore 2a-1=3a-7$ 。
解得： $a=6$ 。
故答案为：6。

【标注】【知识点】同类二次根式

【知识点】最简二次根式

2. 二次根式的加减

栗子5

9. 有下列算式：

$$(1) \sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7}$$

$$(2) 5\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

$$(3) \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} = \sqrt{4} + \sqrt{25} = 7$$

$$(4) 2\sqrt{3a} + \sqrt{27a} = 5\sqrt{3a}$$

其中正确的是()

A. (2)和(4)

B. (1)和(3)

C. (3)和(4)

D. (1)和(4)

【备注】 利用加法法则计算即可**【答案】** A**【解析】** 解：(1) $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式，不能合并，故(1)错误．(2) $5\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$ ，故(2)正确．(3) $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$ ，故(3)错误．(4) $2\sqrt{3a} + \sqrt{27a} = 2\sqrt{3a} + 3\sqrt{3a} = 5\sqrt{3a}$ ，故(4)正确．

故选：A．

【标注】【知识点】二次根式的加减以及混合运算

10. 计算：

$$(1) (\sqrt{24} + \sqrt{0.5}) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{6} \right) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(2) \sqrt{12} + \sqrt{8} - 2\sqrt{2} - \sqrt{27} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【备注】 先化简为最简二次根式，再合并同类二次根式**【答案】** (1) $3\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ (2) $-\sqrt{3}$ **【解析】** (1) 原式 $= 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}$.(2) 原式 $= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$.**【标注】**【知识点】分母、分子有理化

【知识点】二次根式的加减以及混合运算

【能力】运算能力

栗子6

$$11. \text{ 计算： } \frac{7}{7 - \sqrt{21}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} .$$

【备注】 分母为多项式，先进行分母有理化再计算**【答案】** 1 .

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{7}{7-\sqrt{21}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{7(7+\sqrt{21})}{(7-\sqrt{21})(7+\sqrt{21})} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{7+\sqrt{21}}{4} - \frac{\sqrt{21}+3}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

12. 计算：
$$\frac{5}{4-\sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} - \frac{2}{3+\sqrt{7}}.$$

【备注】分母为多项式，先进行分母有理化再计算

【答案】1.

【解析】原式

$$\begin{aligned} &= \frac{5(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})} - \frac{4(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})} - \frac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} \\ &= 4 + \sqrt{11} - \sqrt{11} - \sqrt{7} - 3 + \sqrt{7} = 1. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

|| 独步天下

13. 化简：
$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2018}}.$$

【备注】结合分母有理化的技巧，把每项进行化简，消去互为相反数的若干项

【答案】 $\sqrt{2019} - 1$.

【解析】原式 $= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2019} - \sqrt{2018} = \sqrt{2019} - 1$.

【标注】【知识点】二次根式的巧算

四、二次根式混合运算

|| 栗子7

14. 计算下列各题.

$$(1) \frac{1}{2}\sqrt{12} \cdot \left(3\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2}\right).$$

$$(2) \sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{2\frac{1}{3}} \times \sqrt{1\frac{2}{5}}.$$

$$(3) \sqrt{48} - \sqrt{54} \div \sqrt{2} + (3 - \sqrt{3})\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$(4) (3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) - (1 - \sqrt{2})^2.$$

【备注】与平方差公式、完全平方公式等有一定结合，可以再复习一下

【答案】(1) $3 + \sqrt{6}$.

(2) 1.

(3) $\sqrt{3} + 2$.

(4) $2\sqrt{2} - 1$.

【解析】(1) 原式 $= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{12 \times \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \times \sqrt{12 \times 2}$
 $= 3 + \sqrt{6}.$

(2) 原式 $= \sqrt{\frac{5}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{7}{5}}$
 $= 1.$

(3) 原式 $= 4\sqrt{3} - \sqrt{54} \div 2 + \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$
 $= 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 - 1$
 $= \sqrt{3} + 2.$

(4) 原式 $= 9 - 7 - (1 - 2\sqrt{2} + 2)$
 $= 2 - 3 + 2\sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2} - 1.$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的乘除混合运算

【知识点】二次根式的四则混合运算

15. 计算：

$$(1) 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}.$$

$$(2) \sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{2\frac{1}{3}} \times \sqrt{1\frac{2}{5}}.$$

$$(3) (2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

$$(4) \left(\frac{\sqrt{75}}{3} - \frac{1}{8} \right) - 2 \left(\sqrt{0.5} + \sqrt{\frac{1}{3}} \right).$$

$$(5) \left(\sqrt{48} + \frac{1}{4}\sqrt{6} \right) \div 3\sqrt{2}.$$

$$(6) \sqrt{8a^3} - \sqrt{27b^3} - a\sqrt{\frac{a}{2}} + b^2\sqrt{\frac{1}{3b}}.$$

【备注】混合运算，注意先后顺序

【答案】 (1) $30\sqrt{2}$.

(2) 1.

(3) $20 + 4\sqrt{15}$.

(4) $\sqrt{3} - \frac{1}{8} - \sqrt{2}$.

(5) $\frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}$.

(6) $\frac{3a\sqrt{2a}}{2} - \frac{8b\sqrt{3b}}{3}$.

【解析】 (1) $3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}$

$$= 6 \times \sqrt{50}$$

$$= 30\sqrt{2}.$$

$$(2) \sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{2\frac{1}{3}} \times \sqrt{1\frac{2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{7}{5}}$$

$$= 1.$$

$$(3) (2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

$$= 20 + 4\sqrt{15} + 3 - 5 + 2$$

$$= 20 + 4\sqrt{15}.$$

$$(4) \left(\frac{\sqrt{75}}{3} - \frac{1}{8} \right) - 2 \left(\sqrt{0.5} + \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{8} - \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{1}{8} - \sqrt{2}.$$

$$(5) \left(\sqrt{48} + \frac{1}{4}\sqrt{6} \right) \div 3\sqrt{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

$$(6) \sqrt{8a^3} - \sqrt{27b^3} - a\sqrt{\frac{a}{2}} + b^2\sqrt{\frac{1}{3b}}$$

$$= 2a\sqrt{2a} - 3b\sqrt{3b} - \frac{a\sqrt{2a}}{2} + \frac{b\sqrt{3b}}{3}$$

$$= \frac{3a\sqrt{2a}}{2} - \frac{8b\sqrt{3b}}{3}.$$

【标注】【知识点】实数运算

【知识点】二次根式的乘除混合运算

【知识点】二次根式的加减以及混合运算

【知识点】二次根式的四则混合运算

【能力】运算能力