

第1讲二次根式的概念和性质（练习）

一、二次根式

练习

1. 下列各式中一定是二次根式的是（ ）.

A. $\sqrt[3]{16}$

B. $\sqrt{a}$

C. $\sqrt{-a^2-1}$

D. $\sqrt{a^2+2}$

【答案】D

【解析】A. $\sqrt[3]{16}$ 是二次根式，故本选项错误.

B. 当 $a < 0$ 时无意义，故本选项错误.

C. $\sqrt{-a^2-1}$, $-a^2-1 < 0$ 无意义，故本选项错误.

D. $\sqrt{a^2+2}$, $a^2+2 > 0$. $\therefore$ 一定是二次根式，故本选项正确.

故选：D.

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

2. 下列各式： $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{b+2}(b \geq 2)$, $\sqrt{-(3x-1)^2}$, $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, 其中是二次根式的个数有（ ）.

A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】B

【解析】 $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{b+2}(b \geq 2)$, $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$, 符合二次根式的形式，故是二次根式，

$\sqrt{-(3x-1)^2}$ 的被开方数小于等于0，当小于0时无意义，不是二次根式，

$\sqrt{b^2-4ac}$ 被开方数不确定，不是二次根式.

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

3. 要使代数式 $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）.

A. $x > -1$

B. $x \geq -1$

C. $x \neq 0$

D. $x > -1$ 且 $x \neq 0$

【答案】 A

【解析】 依题意得： $x+1>0$ ，

解得 $x>-1$ 。

故选：A。

【标注】 【知识点】 二次根式与分式有意义综合

4.

(1) 使式子 $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ 有意义的 x 的取值范围是()。

A. $x \geq 1$

B. $-1 \leq x \leq 2$

C. $x \leq 2$

D. $-1 < x < 2$

(2) 式子 $\frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 有意义的 x 的数值范围是()。

A. $x \geq -\frac{1}{2}$ 且

B. $x \neq 1$

C. $x \geq -\frac{1}{2}$

D. $x > -\frac{1}{2}$ 且

$x \neq 1$

$x \neq 1$

(3) 若式子 $\frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{x-7}$ 有意义，则 x 的取值范围是()。

A. $x \neq 3$

B. $x > 3$

C. $x > 3$ 且 $x \neq 7$

D. $x \neq 2$

【答案】 (1) B

(2) A

(3) C

【解析】 (1) $\because \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ 有意义，

$$\therefore x+1 \geq 0 \text{ 且 } 2-x \geq 0,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

(2) $\because \frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 有意义，

$$\therefore 2x+1 \geq 0 \text{ 且 } x-1 \neq 0,$$

$$\therefore x \geq -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1.$$

(3) $\because \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{x-7}$ 有意义，

$$\therefore x-3 \geq 0, \text{ 且 } x-7 \neq 0,$$

$$\therefore x \geq 3 \text{ 且 } x \neq 7.$$

【标注】 【知识点】 二次根式有意义的条件

二、二次根式的性质

练习

5. 已知 $\sqrt{a-2} + (b+3)^2 = 0$, 则 $(a+b)^{2017}$ 的值为().

A. 0

B. 2017

C. -1

D. 1

【答案】C

【解析】 $\sqrt{a-2} + (b+3)^2 = 0$,
 $\therefore \sqrt{a-2} \geq 0, (b+3)^2 \geq 0$,
 $\therefore \sqrt{a-2} = 0, (b+3)^2 = 0$,
 $\therefore a = 2, b = -3$,
 $\therefore (a+b)^{2017} = (2-3)^{2017} = -1$.
故选C.

【标注】【知识点】非负性的应用

6. 已知 $\sqrt{2a+b^2} + |b^2-9| = 0$, 求 $a+b$ 的值.

【答案】 $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{15}{2}$.

【解析】 $\therefore \sqrt{2a+b^2} + |b^2-9| = 0, \sqrt{2a+b^2} \geq 0, |b^2-9| \geq 0$,
 $\therefore \sqrt{2a+b^2} = 0, |b^2-9| = 0$,
 $\therefore b^2 = 9, 2a = -9$,
 $\therefore b = \pm 3, a = -\frac{9}{2}$,
① $b = 3$ 时, $a+b = -\frac{3}{2}$
② $b = -3$ 时, $a+b = -\frac{15}{2}$,
故 $a+b$ 的值是 $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{15}{2}$.

【标注】【知识点】绝对值的非负性

练习

7. 已知 $y = \sqrt{2x-3} + \sqrt{3-2x} - 4$, 计算 $x-y^2$ 的值.

【答案】 $-14\frac{1}{2}$.

【解析】 由题意得： $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \end{cases}$
解得： $x = \frac{3}{2}$,

把 $x = \frac{3}{2}$ 代入 $y = \sqrt{2x - 3} + \sqrt{3 - 2x} - 4$, 得 $y = -4$,

当 $x = \frac{3}{2}$, $y = -4$ 时 $x - y^2 = \frac{3}{2} - 16 = -14\frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】 二次根式有意义的条件

8. 已知 x, y 为实数, 且 $y = \frac{1}{3} + \sqrt{4x - 1} + \sqrt{1 - 4x}$, 求 $\frac{x}{y}$ 的值 .

【答案】 $\frac{3}{4}$.

【解析】 $\because x, y$ 为实数, $\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 1 - 4x \geq 0 \end{cases}$

$\therefore$ 有 $4x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{4}$ 从而有 $y = \frac{1}{3}$, 故 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$.

【标注】 【知识点】 二次根式有意义的条件

9. 已知实数 a, b 满足 $\sqrt{a - 9} + 2\sqrt{18 - 2a} = b - 4$, 求 ab 的平方根 .

【答案】 ab 的平方根为 ± 6 .

【解析】 $a = 9$, $b = 4$, $ab = 36$, ab 的平方根为 ± 6 .

【标注】 【知识点】 二次根式有意义的条件

10. 已知 $m = \frac{\sqrt{16 - n^2} + \sqrt{n^2 - 16}}{n + 4} - 3$, 求 $(m + n)^{2018}$ 的值 .

【答案】 1 .

【解析】 $\because 16 - n^2 \geq 0$ 且 $n^2 - 16 \geq 0$,

$\therefore n^2 \leq 16$ 且 $n^2 \geq 16$,

$\therefore n^2 = 16$,

$\therefore n = \pm 4$,

又 $\because n + 4 \neq 0$,

$$\therefore n \neq -4,$$

$$\therefore n = 4,$$

$$\text{则 } m = \frac{\sqrt{16-4^2} + \sqrt{4^2-16}}{4+4} - 3 = -3,$$

$$\therefore (m+n)^{2018} = (4-3)^{2018} = 1.$$

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

练习

11. 下列各式中，正确的是（ ）.

A. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ B. $(-\sqrt{3})^2 = 9$ C. $\sqrt{-9} = -3$ D. $\pm\sqrt{9} = \pm 3$

【答案】 D

【解析】 A 选项： $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ ，故A选项错误；

B 选项： $(-\sqrt{3})^2 = 3$ ，故B选项错误；

C 选项： -9 没有算术平方根，故C选项错误；

D 选项： $\pm\sqrt{9} = \pm 3$ ，故D选项正确。

故选 D.

【标注】【知识点】二次根式的性质

12. 下列二次根式计算正确的是（ ）.

A. $\sqrt{49} = \pm\sqrt{7}$

B. $\pm\sqrt{16} = 4$

C. $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2}$

D. $\left(\sqrt{\frac{5}{13}}\right)^2 = \frac{5}{13}$

【答案】 D

【解析】 A 选项： $\sqrt{49} = 7$ ，故A错误；

B 选项： $\pm\sqrt{16} = \pm 4$ ，故B错误；

C 选项：

$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1$ ，故C错误；

D 选项： $\left(\sqrt{\frac{5}{13}}\right)^2 = \frac{5}{13}$ ，故D正

确。

故选 D。

【标注】【知识点】二次根式的性质

练习

13. 已知 $|2010 - a| + \sqrt{a - 2011} = a$ ，求 $a - 2010^2$ 的值。

【答案】 2011

【解析】 $\because a - 2011 \geq 0$ ，

$\therefore 2010 - a \leq 0$ ，

$\therefore$ 原式为： $a - 2010 + \sqrt{a - 2011} = a$ ，

$\sqrt{a - 2011} = 2010$ ，

平方得 $a = 2010^2 + 2011$ ，

$\therefore a - 2010^2 = 2011$ 。

【标注】【知识点】绝对值的非负性

14. 已知 $|2020 - a| + \sqrt{a - 2021} = a$ ，求 $a - 2020^2$ 的值。

【答案】 2021。

【解析】 $\because a - 2021 \geq 0$ ， $\therefore 2020 - a < 0$ 。

$\therefore$ 原式为： $a - 2020 + \sqrt{a - 2021} = a$ ，

$\sqrt{a - 2021} = 2020$ ，

平方得 $a = 2020^2 + 2021$ ，

$\therefore a - 2020^2 = 2021$ 。

【标注】【知识点】二次根式的性质

练习

15. 若 $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 2$, 则 x 的取值范围是 () .

A. $x > 2$

B. $x < 2$

C. $x \geq 2$

D. $x \leq 2$

【答案】 D

【解析】 $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 2$,

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2} = 2-x ,$$

$$\therefore |x-2| = 2-x ,$$

$$\therefore x-2 \leq 0 ,$$

$$\therefore x \leq 2 .$$

【标注】 【知识点】 二次根式的性质

16. 如果 $\sqrt{(2a-1)^2} = 1-2a$, 则 () .

A. $a < \frac{1}{2}$

B. $a \leq \frac{1}{2}$

C. $a > \frac{1}{2}$

D. $a \geq \frac{1}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\because \sqrt{(2a-1)^2} = 1-2a$,

$$\therefore 1-2a \geq 0 ,$$

$$\text{解得 } a \leq \frac{1}{2} ,$$

故选B .

【标注】 【知识点】 二次根式的性质

|| 练习

17. 若 $a < 1$, 化简 $\sqrt{(a-1)^2} - 1 = ()$.

A. $a-2$

B. $2-a$

C. a

D. $-a$

【答案】 D

【解析】 因为 $a < 1$, 所以 $a-1 < 0$,

$$\text{所以 } \sqrt{(a-1)^2} - 1$$

$$= |a-1| - 1$$

$$= -(a-1) - 1$$

$$= 1 - a - 1$$

$$= -a .$$

【标注】【知识点】已知范围的二次根式化简求值

18. 若 $2 < a < 3$, 则 $\sqrt{(2-a)^2} - \sqrt{(a-3)^2}$ 等于 () .

A. $5 - 2a$

B. $1 - 2a$

C. $2a - 5$

D. $2a - 1$

【答案】 C

【解析】 因为 $2 < a < 3$, 所以 $2 - a < 0$, $a - 3 < 0$, 所以

$$\sqrt{(2-a)^2} - \sqrt{(a-3)^2} = (a-2) - (3-a) = 2a-5 . \text{ 故选C} .$$

【标注】【知识点】二次根式的性质

19. 已知 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, 则化简 $\sqrt{(x-1)^2} + |x-3| + \sqrt{4x^2+4x+1}$ 的结果等于 _____ .

【答案】 5

【解析】 $\because -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,

$$\therefore x-1 \leq 0 , x-3 < 0 , 2x+1 \geq 0 ,$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2} + |x-3| + \sqrt{4x^2+4x+1}$$

$$= |x-1| + |x-3| + |2x+1|$$

$$= 1-x+3-x+2x+1$$

$$= 5 .$$

【标注】【知识点】二次根式的化简求值——利用完全平方

20. 已知 $\sqrt{2a-4} + 3b = 12$, 化简 $b\sqrt{a^2-4a+4} + a\sqrt{b^2-8b+16}$.

【答案】 $4a - 2b$

【解析】 $\because \sqrt{2a-4} + 3b = 12$,

$$\therefore \sqrt{2a-4} = 12 - 3b ,$$

$$\because \sqrt{2a-4} \geq 0 ,$$

$$\therefore 2a-4 \geq 0 , 12-3b \geq 0 ,$$

即 $a - 2 \geq 0, b - 4 \leq 0$.

$$\therefore \text{原式} = b\sqrt{(a-2)^2} + a\sqrt{(b-4)^2} = b(a-2) + a(4-b) = 4a - 2b.$$

【标注】【知识点】利用二次根式非负性化简求值

练习

21. 计算 $(\sqrt{3-x})^2 + \sqrt{(x-4)^2}$ 的结果是 ().

A. $7 - 2x$

B. -1

C. $2x - 7$

D. 1

【答案】 A

【解析】 $3 - x$ 为被开方数,

$$3 - x \geq 0,$$

$$x \leq 3,$$

$$\text{原式} = 3 - x + 4 - x$$

$$= 7 - 2x.$$

故选 A.

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

【能力】 运算能力

22. $\sqrt{(x-2)^2} + (\sqrt{2-x})^2$ 的值一定是 ().

A. 0

B. $4 - 2x$

C. $2x - 4$

D. 4

【答案】 B

【解析】 由二次根式的双重非负性,

$$\sqrt{(x-2)^2} + (\sqrt{2-x})^2 \text{ 中,}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq 2,$$

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2} = 2 - x,$$

$$(\sqrt{2-x})^2 = 2 - x,$$

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2} + (\sqrt{2-x})^2 = 2 - x + 2 - x,$$

$$= 4 - 2x.$$

故选 B.

【标注】【知识点】利用二次根式非负性化简求值

23. 若 $\sqrt{(2006-m)^2} + \sqrt{m-2007} = m$ ，求代数式 $m - 2006^2$ 的值。

【答案】2007。

【解析】要求代数式 $m - 2006^2$ 的值，若从已知条件中直接求出 m 的值，还是有一定的难度的，不如从已知条件中发现隐含的条件，寻找 $m - 2006^2$ 的整体因式，使问题获解。
要使 $\sqrt{(2006-m)^2} + \sqrt{m-2007} = m$ 成立，必须 $m - 2007 \geq 0$ ，即 $2006 - m < 0$ ，所以 $\sqrt{(2006-m)^2} = |2006 - m| = m - 2006$ 。所以原已知条件化为
 $m - 2006 + \sqrt{m-2007} = m$ ，
即 $\sqrt{m-2007} = 2006$ ，两边平方得 $m - 2007 = 2006^2$ ，所以 $m - 2006^2 = 2007$ 。

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

24. 已知 $\sqrt{(x-1000)^2} + (\sqrt{998-x})^2 = 2000$ ， $y = \sqrt{m+8} + \sqrt{m-1} + \sqrt{1-m}$ ，求 $y - x$ 的平方根。

【答案】 ± 2 。

【解析】由题意得， $998 - x \geq 0$ ，
解得： $x \leq 998$ ，
 $\therefore 1000 - x + 998 - x = 2000$ ，
解得： $x = -1$ ，
由题意得， $m - 1 \geq 0$ 且 $1 - m \geq 0$ ，
解得： $m \geq 1$ 且 $m \leq 1$ ，
 $\therefore m = 1$ ，
 $y = \sqrt{1+8} = 3$ ，
 $\therefore y - x = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$ ，
 $\therefore (\pm 2)^2 = 4$ ，
 $\therefore 4$ 的平方根是 ± 2 ，
即 $y - x$ 的平方根是 ± 2 。

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

三、二次根式的乘除

练习

25. 下列等式中成立的是 () .

- A. $\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{5}$ B. $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ D. $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 15$

【答案】 C

【解析】 选项A, $\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$.

选项B, $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$.

选项D, $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

【标注】 【知识点】二次根式的乘法

26. 计算 $(1 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})$ 等于 () .

- A. $3 - \sqrt{6}$ B. $2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ C. 3 D. $2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$

【答案】 D

【解析】 $(1 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$.

【标注】 【知识点】二次根式的四则混合运算

27. 计算： $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 6

【解析】 $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$.

【标注】 【知识点】二次根式的乘法

28. 计算： $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{27}$.

【答案】 3 .

【解析】 $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 27} = \sqrt{9} = 3$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的乘除混合运算

29. 计算： $\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{5}{2}}$ 的结果是_____.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】原式= $\sqrt{2 \times \frac{5}{2}} = \sqrt{5}$.
故答案为： $\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】二次根式的乘法

30. 计算.

- (1) $\sqrt{2\frac{2}{3}} \times \sqrt{24}$.
(2) $\sqrt{6a^3} \cdot \sqrt{\frac{3a}{2}} (a \geq 0)$.
(3) $2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{y}$.

【答案】(1) 8.

(2) $= 3a^2$.

(3) $2y$.

【解析】(1) $\sqrt{2\frac{2}{3}} \times \sqrt{24}$
 $= \sqrt{\frac{8}{3} \times 24}$
 $= \sqrt{8 \times 8}$
 $= 8$.
(2) $\sqrt{6a^3} \cdot \sqrt{\frac{3a}{2}} (a \geq 0)$
 $= \sqrt{6a^3 \cdot \frac{3a}{2}}$
 $= \sqrt{(3 \times 3)a^4}$
 $= 3a^2$.
(3) $2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{y}$
 $= 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{x} \cdot y}$

$$= 2\sqrt{y \cdot y}$$

$$= 2y .$$

【标注】【知识点】二次根式的乘法

练习

31. 计算： $\sqrt{24} \div \sqrt{6} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6} \div \sqrt{6} = 2$.

故答案为：2 .

【标注】【知识点】二次根式的除法

32. 化简： $\sqrt{\frac{5}{9}} \div \sqrt{\frac{1}{27}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{15}$

【解析】原式 $= \sqrt{\frac{5}{9} \div \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{5}{9} \times 27} = \sqrt{15}$.

【标注】【知识点】二次根式的除法

33. 计算 $2\sqrt{8} \div \sqrt{\frac{1}{2}}$ 的结果是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】8

【解析】 $2\sqrt{8} \div \sqrt{\frac{1}{2}}$
 $= 2 \times 2\sqrt{2} \div \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= 4\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}}$
 $= 8 .$

故答案为：8 .

【标注】【知识点】二次根式的除法

34. 计算： $\frac{1}{2}\sqrt{20} \div \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

【答案】 3.

【解析】 原式 = $\frac{2\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{5}}$
= 3.

【标注】【知识点】二次根式的除法

35. $\sqrt{\frac{a}{b}} \div \sqrt{ab}$ 等于 () .

A. b

B. a

C. $\frac{1}{b}$

D. $\sqrt{ab}$

【答案】 C

【解析】 $\sqrt{\frac{a}{b}} \div \sqrt{ab}$
= $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{ab}}$
= $\sqrt{\frac{1}{b^2}}$
= $\frac{1}{b}$.
故选 C.

【标注】【知识点】二次根式的除法

36. 计算：

(1) $\sqrt{18} \div \sqrt{8}$.

(2) $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$.

(3) $\sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{5}{6}}$.

(4) $\frac{2\sqrt{x^2y}}{3\sqrt{xy}}$.

【答案】 (1) $\frac{3}{2}$.

(2) $2\sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{2}$.

$$(4) \frac{2}{3}\sqrt{x}.$$

【解析】(1) $\sqrt{18} \div \sqrt{8}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad &\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad &\sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{5}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{3} \div \frac{5}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{3} \times \frac{6}{5}} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad &\frac{2\sqrt{x^2y}}{3\sqrt{xy}} \\ &= \frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{xy}}{3\sqrt{xy}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式的除法