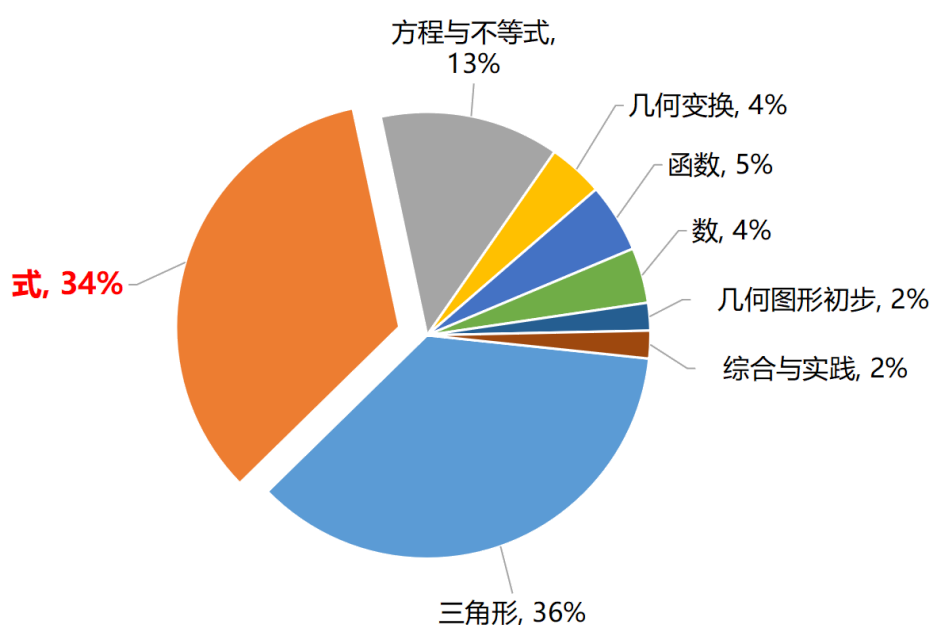


第1讲二次根式的概念和性质

本模块属于人教版教材第十六章的重要内容，重点包括二次根式的概念、性质，运算等内容，本模块在考试中占比较大、小题大题均有涉及，故需要学生理解其性质并熟练进行计算，通过学习本模块，学生将建立起比较完善的代数式及其运算的知识结构，并为二次根式的化简求值、勾股定理、一元二次方程等内容的学习奠定基础。

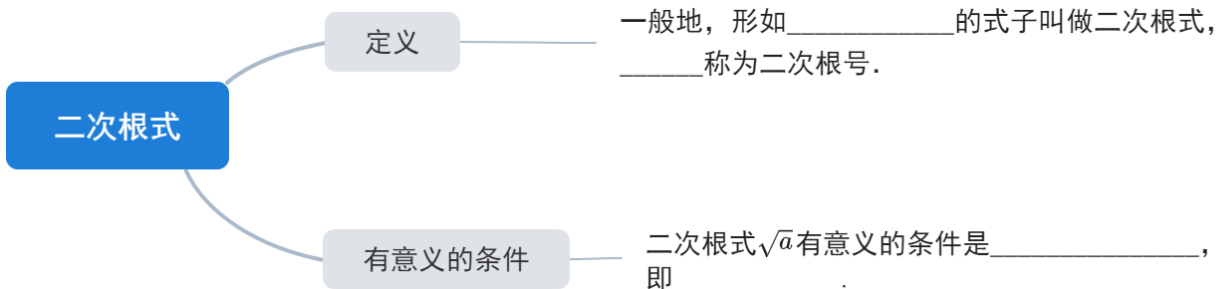
本模块难度中等，适用于二次根式的初步学习，本模块分为二次根式的概念及性质、二次根式的运算 2 讲内容，配套练习与讲义内容完全对照，大量计算帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
二次根式的概念	★	低
二次根式的性质	★★★	高
二次根式的乘除	★★	高
二次根式的加减	★★	中
分母有理化	★★★	高

一、二次根式



【备注】1、二次根式的定义：一般地，形如 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 的式子叫做二次根式，“ $\sqrt{\quad}$ ”称为二次根号。

① 从形式上看，二次根式必须含有二次根号“ $\sqrt{\quad}$ ”，如 $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{16}$ ， $\sqrt{a^2+1}$ 等都是二次根式。

② 二次根式中，被开方数 a 可以是数，也可以是含有字母的代数式，但 a 的值必须是非负数，否则无意义。如 $\sqrt{(-3)^2}$ ， $\sqrt{-a}$ ($a \leq 0$) 的被开方数是非负数，它们是二次根式，而 $\sqrt{-3}$ ， $\sqrt{-a}$ ($a > 0$) 的被开方数是负数，不是二次根式。

2、二次根式有意义的条件：被开方数大于等于零，即 $a \geq 0$ 。

【注意】

当式子中既有二次根式又有分式时，要同时保证被开方数大于等于0，分母不为0。

对于单个二次根式只需满足被开方数大于等于零；

对于多个二次根式，则是多个被开方数同时大于等于零。

🍎 举个“栗”子

栗子1

1. 下列各式是二次根式的是 ()。

A. $\sqrt{-7}$

B. $\sqrt{m}$

C. $\sqrt{a^2+1}$

D. $\sqrt[3]{3}$

【备注】根据概念进行判断

【答案】C

【解析】二次根式是指被开方数为非负数。A选项的被开方数为负数；B选项中当 $m < 0$ 时则不是二次根式；D选项为三次根式。故选C。

【标注】【知识点】二次根式的定义

2. 若 $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ().
- A. $x > \frac{1}{2}$ B. $x \geq \frac{1}{2}$ C. $x < \frac{1}{2}$ D. $x > 0$

【备注】 有意义的条件, 二次根式在分母位置时考虑被开方数不能为零

【答案】 A

【解析】 $\because 2x - 1 > 0,$
 $\therefore x > \frac{1}{2}.$

【标注】 【知识点】分式有意义的条件

【知识点】二次根式有意义的条件

二、二次根式的性质

1. $\sqrt{a} \geq 0 (a \geq 0)$

$\sqrt{a} \geq 0 (a \geq 0)$, 二次根式的双重非负性.

二次根式双重非负性的应用:

①几个非负数之和等于0, 则每个非负数 都等于0,

如 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b-3} = 0$, 则 $a+1=0$, $b-3=0$;

② $\sqrt{x-a} + \sqrt{a-x}$, 则 x 的取值范围是 $\begin{cases} x-a \geq 0 \\ a-x \geq 0 \end{cases}$, 即 $x = \underline{a}$.

栗子2

3. 若 $\sqrt{x+3} + |y-2| = 0$, 则 $(x+y)^{2017}$ 的值为 ().
- A. -1 B. 1 C. ± 1 D. 0

【备注】 根据非负性, 得到两个绝对值均为零

【答案】 A

【解析】 $\because \sqrt{x+3} + |y-2| = 0,$
 $\therefore x+3=0, y-2=0,$
 $\therefore x=-3, y=2,$
 $\therefore x+y = -3+2 = -1,$

$$\therefore (x+y)^{2017} = (-1)^{2017} = -1.$$

故选A.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的性质

【知识点】绝对值的非负性

【知识点】有理数乘方运算

【知识点】非负性的应用

栗子3

4. 设 x 、 y 为实数，且 $y = 4 + \sqrt{5-x} + \sqrt{x-5}$ ，则 $|x-y|$ 的值是（ ）.

A. 1

B. 9

C. 4

D. 5

【备注】根据非负性，得到 $x=5$

【答案】A

【解析】根据题意得， $y = 4 + \sqrt{5-x} + \sqrt{x-5}$ 有意义，

而 $x-5$ 与 $5-x$ 互为相反数，

则 $x=5$ ，

故 $y=4$ ，

所以 $|x-y|=1$ 。

故选A。

【标注】【知识点】利用二次根式非负性化简求值

5. 若 a 、 b 为实数，且 $b = \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{1-a^2}}{a-1} + 4$ ，则 $a+b$ 的值为（ ）.

A. 3

B. 4

C. 3或5

D. 5

【备注】根据非负性得到 $a=\pm 1$ ，再结合分母不为零排除1

【答案】A

【解析】 $\therefore b = \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{1-a^2}}{a-1} + 4$ ，

$\therefore a^2-1=0$ ，则 $b=4$ ，

解得： $a=1$ （舍去）或 $a=-1$ ，

$$\therefore a + b = 3 .$$

【标注】【知识点】利用二次根式非负性化简求值

$$2. (\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0) .$$

$(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$ 既可以正向运用，也可以逆向运用，正向运用可化简二次根式，逆向运用可以将任意一个非负数写成一个数的平方。

如： $(\sqrt{2})^2 = 4$ ，反过来 $4 = (\sqrt{2})^2$ 。

栗子4

6. 下列各式错误的是（ ）。

A. $5 = (\sqrt{5})^2$

B. $5 = \sqrt{(-5)^2}$

C. $5 = (-\sqrt{5})^2$

D. $5 = (\sqrt{-5})^2$

【备注】 $(\sqrt{a})^2 = a$ 的直接应用

【答案】 D

【解析】 A 选项： $(\sqrt{5})^2 = 5$ ，

$\therefore$ A选项正确，不符合题意；

B 选项： $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ ，

$\therefore$ B选项正确，不符合题意；

C 选项：

$$(-\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{5}) = 5 ,$$

$\therefore$ C选项正确，不符合题意；

D 选项： $\sqrt{-5}$ 无意义，D选项错误，

符合题意。

故选 D。

【标注】【知识点】二次根式的性质

栗子5

7. 已知实数 a 满足 $|2017 - a| + \sqrt{a - 2018} = a$ ，则 $a - 2017^2 =$ _____。

【备注】典型题目，先结合二次根式有意义的条件判断 a 的范围，再去掉绝对值进行整理，结合 $(\sqrt{a})^2 = a$ 进行化简

【答案】 2018

【解析】 原式 $= a - 2017 + \sqrt{a - 2018} = a$,
 $\sqrt{a - 2018} = 2017$,
 $a - 2018 = 2017^2$,
 $a - 2017^2 = 2018$.

【标注】 【知识点】 二次根式的性质

$$3. \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

运用 $\sqrt{a^2} = |a|$ 进行化简时，一定要结合已知条件或隐含条件先判断被开方数的底数 a 的符号，然后利用 绝对值 的性质进行化简。

栗子6

8. 若 $\sqrt{x^2} = -x$ ，则 x 的取值范围是 _____。

【备注】 写取值范围的题目，注意绝对值的化简

【答案】 $x \leq 0$

【解析】 $\because \sqrt{x^2} = |x| = -x, \therefore x \leq 0$.

【标注】 【知识点】 二次根式的性质

栗子7

9. 已知 $3 < x < 5$ ，则化简 $\sqrt{(1-x)^2} + \sqrt{(5-x)^2}$ 的结果是 ()。

A. 4

B. $6 - 2x$

C. -4

D. $2x - 6$

【备注】 给出范围进行化简

【答案】 A

【解析】 $\because 3 < x < 5$,
 $\therefore 1 - x < 0, 5 - x > 0$,
则原式 $= |1 - x| + |5 - x|$
 $= x - 1 + 5 - x$

$$= 4,$$

故选：A.

【标注】【知识点】已知范围的二次根式化简求值

10. 若 $0 < x < 1$, 化简 $\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4}$ 等于 ().
- A. $\frac{2}{x}$ B. $-\frac{2}{x}$ C. $-2x$ D. $2x$

【备注】 给出范围进行化简，注意先把根号内的式子进行整理，再化简为完全平方式

【答案】 D

【解析】 原式 $= \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = x + \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - x\right) = 2x$.

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

【能力】 运算能力

栗子8

11. 计算 $(\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-3)^2}$ 的结果是 ().
- A. 1 B. -1 C. $2x - 5$ D. $5 - 2x$

【备注】 先结合二次根式有意义的条件判断a的范围，再去掉绝对值进行整理，有一定综合性

【答案】 D

【解析】 由题意要求 $(\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-3)^2}$ 的值，

$$\because 2 - x \geq 0,$$

$$\therefore x \leq 2,$$

$$\therefore x - 3 < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(x-3)^2} = 3 - x,$$

$$\therefore (\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-3)^2} = 2 - x + 3 - x = 5 - 2x.$$

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

【能力】 运算能力

12.

已知实数 a 满足 $\sqrt{(2020-a)^2} + \sqrt{a-2021} = a$ ，则 $\frac{a-1}{2020} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【备注】与第7题类似，本题要先化简 $\sqrt{(2020-a)^2}$

【答案】 2021

【解析】 $\sqrt{a-2021}$ 有意义，

$$\therefore a - 2021 \geq 0,$$

$$\therefore a \geq 2021,$$

$$\therefore 2020 - a < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(2020-a)^2} + \sqrt{a-2021} = a,$$

$$a - 2020 + \sqrt{a-2021} = a,$$

$$\sqrt{a-2021} = 2020,$$

$$a - 2021 = 2020^2,$$

$$a = 2020^2 + 2021,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a-1}{2020} &= \frac{2020^2 + 2021 - 1}{2020} \\ &= \frac{2020^2 + 2020}{2020} \end{aligned}$$

$$= 2020 + 1$$

$$= 2021.$$

【标注】【知识点】利用二次根式非负性化简求值

三、二次根式的乘除

1、二次根式的乘法法则： $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \ (a \geq 0, b \geq 0)$

乘法公式的推广：

$$\textcircled{1} \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} \ (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0);$$

$$\textcircled{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} \ (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0)$$

$$\textcircled{3} (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab}, \ (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b;$$

$$\textcircled{4} \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_3} \cdots \sqrt{a_n} = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} \ (a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \cdots, a_n \geq 0)$$

2、二次根式的除法法则： $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \ (a \geq 0, b > 0)$ 。

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 逆向运用时， $a \geq 0, b > 0$ ，否则是不对的。

13. 计算： $5\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【备注】根号内乘根号内，系数乘系数

【答案】20

【解析】
$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} \times \sqrt{8} &= 5 \times \sqrt{2 \times 8} \\ &= 5 \times \sqrt{4^2} \\ &= 5 \times 4 \\ &= 20 . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式的乘法

14. 计算： $(-2\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【备注】注意 $(\sqrt{a})^2 = a$ 的应用

【答案】-6

【解析】
$$\begin{aligned} (-2\sqrt{3}) \times \sqrt{3} &= -2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= -2 \times 3 \\ &= -6 . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式的乘法

15. 计算： $\sqrt{6} \times \sqrt{3a} \times \sqrt{\frac{1}{3}b}$.

【备注】与字母结合，按照法则计算即可

【答案】 $\sqrt{6ab}$.

【解析】
$$\begin{aligned} \sqrt{6} \times \sqrt{3a} \times \sqrt{\frac{1}{3}b} &= \sqrt{6 \times 3a \times \frac{1}{3}b} \\ &= \sqrt{6ab} . \end{aligned}$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的乘除混合运算

栗子10

16. 计算 $2\sqrt{6} \div \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 的结果是 _____ .

【备注】根号内除根号内，系数除系数

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】 $2\sqrt{6} \div \frac{2}{3}\sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{6} \times \frac{3}{2\sqrt{3}}$ (约分)
 $= 3\sqrt{2}$.

故答案为： $3\sqrt{2}$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的乘除混合运算

17. 计算： $\sqrt{6a} \div \sqrt{2a} =$ _____ .

【备注】与字母结合，按照法则计算即可

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $\sqrt{6a} \div \sqrt{2a} = \sqrt{\frac{6a}{2a}} = \sqrt{3}$.

【标注】【知识点】二次根式的乘除混合运算

18. 计算： $\sqrt{\frac{b}{5}} \div \sqrt{\frac{b}{20a^2}} = ()$. ($a > 0, b > 0$)

A. $\frac{b}{10a}$

B. $\frac{10a}{b}$

C. $2a$

D. $2a^2$

【备注】除法计算，注意遇除变乘再化简

【答案】 C

【解析】 原式 $\sqrt{\frac{b}{5} \div \frac{b}{20a^2}} = \sqrt{\frac{b}{5} \cdot \frac{20a^2}{b}} = \sqrt{4a^2} = 2a$,
故选：C .

【标注】【知识点】二次根式的乘除混合运算

【能力】运算能力