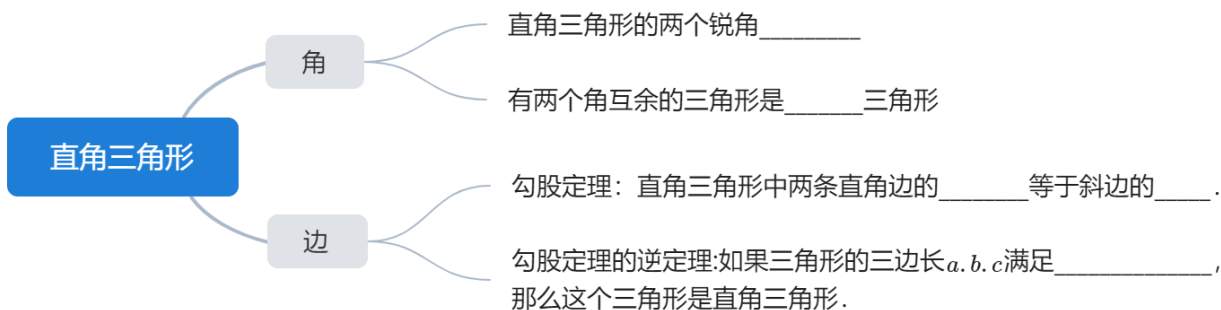


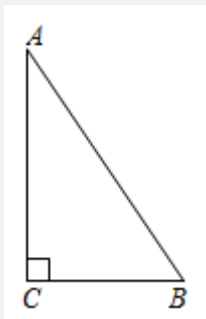
第2讲特殊三角形

一、 直角三角形



教法备注

与直角三角形有关的角



直角三角形的两个锐角互余；

反之，有两个角互余的三角形是直角三角形．

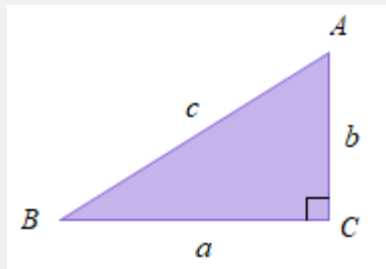
【注意】直角三角形可以用符号“ $\text{Rt}\triangle$ ”表示，直角三角形 ABC 可以写成 $\text{Rt}\triangle ABC$ ．

勾股定理

如果直角三角形的两条直角边长分别为 a, b ，斜边长为 c ，

那么 $a^2 + b^2 = c^2$ ．

即直角三角形中两条直角边的平方和等于斜边的平方．



【注意】

(1) 如图所示：勾——短的直角边，股——长的直角边，弦——斜边．

(2) 勾股定理只适用于直角三角形，而不适用与锐角三角形和钝角三角形．

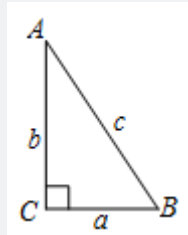
(3) 为方便应用勾股定理进行计算，常将 $a^2 + b^2 = c^2$ 进行如下变形：

$$\textcircled{1} a^2 = c^2 - b^2 ; \textcircled{2} b^2 = c^2 - a^2 ; \textcircled{3} a = \sqrt{c^2 - b^2} ;$$

$$\textcircled{4} b = \sqrt{c^2 - a^2} ; \textcircled{5} c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

勾股定理逆定理

如果三角形的三边长 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么这个三角形是直角三角形.



【注意】

(1) 勾股定理的逆定理是直角三角形的判定定理, 用它判断是否为直角三角形的一般步骤是:

①确定最大边(不妨设为 c);

②若 $c^2 = a^2 + b^2$, 则 $\triangle ABC$ 是以 $\angle C$ 为直角的直角三角形;

(2) 定理中的 a, b, c 及 $a^2 + b^2 = c^2$ 只是一种表现形式, 不能认为是唯一的. 若三角形三边长 a, b, c 满足 $a^2 + c^2 = b^2$, 那么以 a, b, c 为三边的三角形是直角三角形, 但是 b 为斜边.

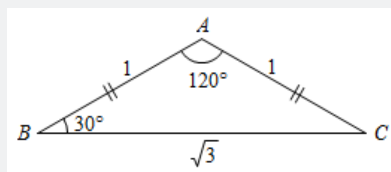
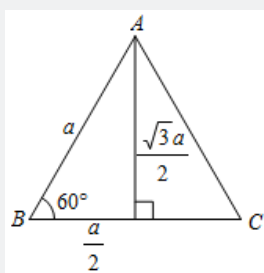
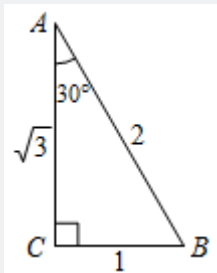
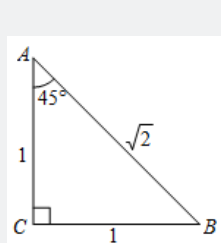
特殊的直角三角形:

(1) 等腰直角三角形的三边比为 $1 : 1 : \sqrt{2}$ (其中 $\sqrt{2}$ 为斜边).

(2) 含有 30° 角的直角三角形的三边比为 $1 : \sqrt{3} : 2$ (其中 2 为斜边).

(3) 若等边三角形的边长为 a , 则等边三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

(4) 顶角为 120° 的等腰三角形的三边比为 $1 : 1 : \sqrt{3}$.



1. 与直角三角形有关的角

典题精练

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$, 则这个三角形是().

A. 锐角三角形

B. 等腰三角形

C. 钝角三角形

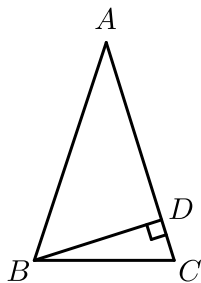
D. 含 30° 角的直角三角形

【答案】D

【解析】 $\because \angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$,
 $\therefore \angle B = 2\angle A$, $\angle C = 3\angle A$,
又 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,
 $\therefore \angle A + 2\angle A + 3\angle A = 180^\circ$,
解得： $\angle A = 30^\circ$,
 $\therefore \angle C = 3\angle A = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$,
故选D .

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = \angle ABC = 2\angle A$ ， BD 是 AC 边上的高，求 $\angle DBC$ 的度数 .



【答案】 18° .

【解析】 $\because \angle C = \angle ABC = 2\angle A$,
 $\therefore \angle C + \angle ABC + \angle A = 5\angle A = 180^\circ$,
 $\therefore \angle A = 36^\circ$.
则 $\angle C = \angle ABC = 2\angle A = 72^\circ$.
又 BD 是 AC 边上的高 ,
则 $\angle DBC = 90^\circ - \angle C = 18^\circ$.

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

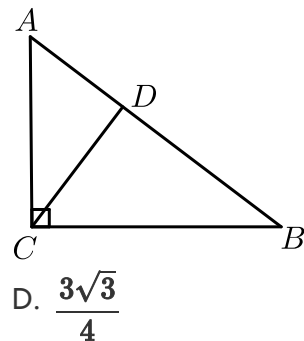
【重点强调】

2012年天津中考真题第17题

2. 与直角三角形有关的边

 典题精练1

3. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 9$ ， $BC = 12$ ，则点 C 到 AB 的距离是（ ）。



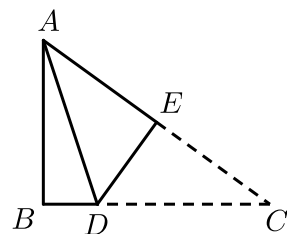
- A. $\frac{36}{5}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【答案】A

【解析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得： $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 15$ ，
 设点 C 到 AB 的距离为 h ，由等面积法得： $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$ ，
 代入数据得 $h = \frac{36}{5}$ 。

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

4. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 3\text{cm}$ ， $AC = 5\text{cm}$ 。将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 C 与 A 重合，得折痕 DE ，则 DC 为（ ）。



- A. 8cm B. $\frac{25}{8}\text{cm}$ C. 9cm D. $\frac{25}{10}\text{cm}$

【答案】B

【解析】依题可知： $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ ，
 $\therefore AD = CD$ 。
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 3\text{cm}$ ， $AC = 5\text{cm}$ ，
 $\therefore BC = 4\text{cm}$ 。
 设 $DC = x\text{cm}$ ，则 $BD = (4 - x)\text{cm}$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，由勾股定理得，
 $\therefore 3^2 + (4 - x)^2 = x^2$ ，
 解得 $x = \frac{25}{8}$ 。

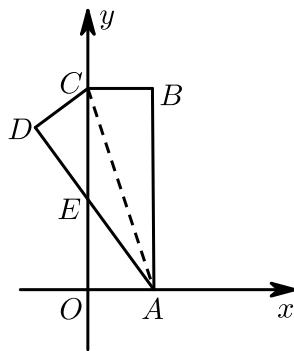
$$\text{即 } DC = \frac{25}{8}.$$

故选B.

【标注】【知识点】三角形折叠

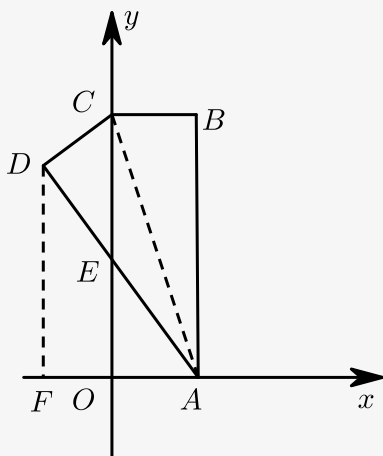
过关斩将

5. 如图，在直角坐标系中，长方形 $ABCO$ 的边 OA 在 x 轴上，边 OC 在 y 轴上，点 B 的坐标为 $(1, 3)$ ，将长方形沿对角线 AC 翻折， B 点落在 D 点的位置，且 AD 交 y 轴于点 E ，那么点 D 的坐标为 _____.



【答案】 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$

【解析】方法一：如图，过 D 作 $DF \perp AF$ 于 F ，



$\because$ 点 B 的坐标为 $(1, 3)$ ， $\therefore AO = 1$ ， $AB = 3$ ，

根据折叠可知： $CD = OA$ ，而 $\angle D = \angle AOE = 90^\circ$ ， $\angle DEC = \angle AEO$ ，

$\therefore \triangle CED \cong \triangle AEO$ ， $\therefore OE = DE$ ， $OA = CD = 1$ ，

设 $OE = x$ ，那么 $CE = 3 - x$ ， $DE = x$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DCE$ 中， $CE^2 = DE^2 + CD^2$ ， $\therefore (3 - x)^2 = x^2 + 1^2$ ， $\therefore x = \frac{4}{3}$ 。

$\therefore AD = AB = 3$ ， $\therefore AE = CE = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ ，

$$\therefore \text{在Rt}\triangle CDE\text{中, 斜边}CE\text{边上的高等于}OF, \text{则} OF = \frac{CD \cdot DE}{CE} = \frac{1 \times \frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle DFA\text{中}, DF = \sqrt{(AD)^2 - (AF)^2} = \frac{12}{5}.$$

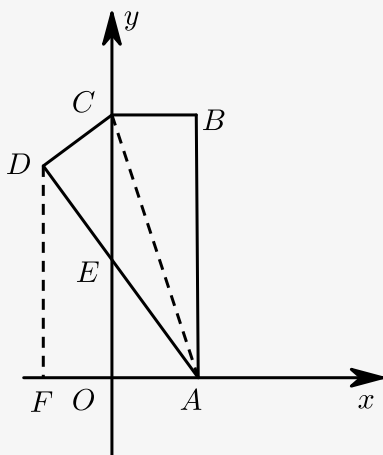
$$\therefore \text{点}D\text{的坐标为}\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right).$$

$$\text{方法二: } D\text{的坐标为}\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right):$$

法一: 几何法, $\triangle CED \cong \triangle AEO$, $CD = 1$ 设 $DE = x$, 则 $CE = 3 - x$, 用勾股定理.

法二: 解析法, 求出 AC 的解析式, 那么点 D 就是点 B 关于直线 AC 的对称点.

方法三: 如图, 过 D 作 $DF \perp AF$ 于 F ,



$$\therefore \text{点}B\text{的坐标为}(1, 3), \therefore AO = 1, AB = 3,$$

根据折叠可知: $CD = OA$, 而 $\angle D = \angle AOE = 90^\circ$, $\angle DEC = \angle AEO$,

$$\therefore \triangle CED \cong \triangle AEO, \therefore OE = DE, OA = CD = 1,$$

$$\text{设} OE = x, \text{那么} CE = 3 - x, DE = x,$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle DCE\text{中}, CE^2 = DE^2 + CD^2, \therefore (3 - x)^2 = x^2 + 1^2, \therefore x = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore AD = AB = 3, \therefore AE = CE = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\text{又} \because OA \perp AF,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{OE}{DF} = \frac{OA}{AF} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore DF = \frac{12}{5}, AF = \frac{9}{5},$$

$$\therefore OF = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \text{点}D\text{的坐标为}\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right).$$

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质以及应用

【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【知识点】轴对称的定义

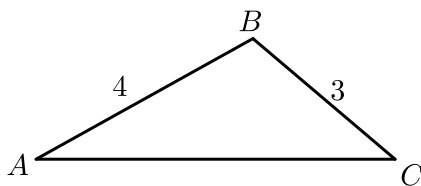
【知识点】象限内坐标的特征

【重点强调】

2018年天津南开区初三二模第17题3分

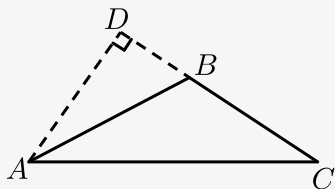
典题精练2

6. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $BC = 3$, $\angle ABC = 120^\circ$, 则 AC 的长为 _____.



【答案】 $\sqrt{37}$

【解析】如图, 过 A 作 $AD \perp CB$ 延长线于 D .



$\because \angle ABC = 120^\circ$, $\therefore \angle ABD = 60^\circ$.

又 $AB = 4$, $\therefore BD = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$.

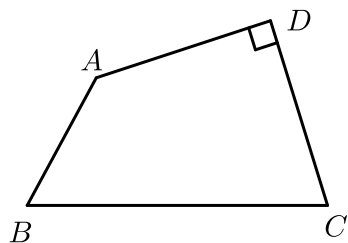
又 $BC = 3$, $\therefore CD = 5$.

$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{37}$.

故答案为: $\sqrt{37}$.

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

7. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle D = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = AD = \sqrt{6}$.

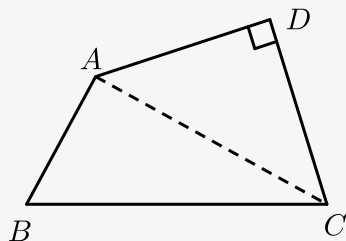


- (1) 求 $\angle BAD$ 的度数 .
- (2) 求四边形 $ABCD$ 的面积 .

【答案】 (1) $\angle BAD = 135^\circ$.

(2) $S_{\text{四边形}ABCD} = 2\sqrt{3} + 3$.

【解析】 (1) 连接 AC ,



$$\because AD = CD = \sqrt{6}, \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 45^\circ, AC = 2\sqrt{3},$$

$$\because AB = 2, BC = 4,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 = BC^2,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是直角三角形, 且 } \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 135^\circ.$$

(2) 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 中, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 3$,

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 2\sqrt{3} + 3.$$

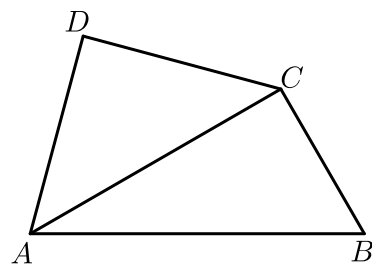
【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2017~2018学年天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期期中第20题

过关斩将

8. 将一副三角尺如图拼接: 含 30° 角的三角尺 ($\triangle ABC$) 的长直角边与含 45° 角的三角尺 ($\triangle ACD$) 的斜边恰好重合. 已知 $AB = 2\sqrt{3}$, P 是 AC 上的一个动点 .



- (1) 当点 P 运动到 $\angle ABC$ 的平分线上时, 连接 DP , 求 DP 的长.
- (2) 当点 P 在运动过程中出现 $PD = BC$ 时, 求此时 $\angle PDA$ 的度数.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(2) $\angle PDA = 75^\circ$ 或 15° .

【解析】(1) 过点 D 作 $DE \perp AC$ 交 AC 于点 E , (如图1)

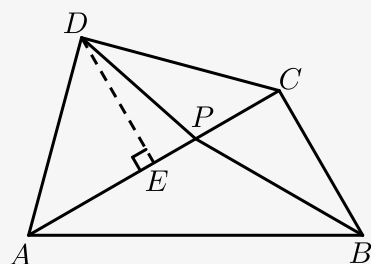


图1

$\because BP$ 为 $\angle ABC$ 的角平分线, $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle CBP = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$,

$\therefore BC = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$,

$\therefore PC = 1$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\angle DCA = 45^\circ$, $DE \perp EC$,

$\therefore EC = \frac{1}{2} AC = \frac{3}{2}$, $DE = \frac{1}{2} AC = \frac{3}{2}$,

$\therefore EP = EC - PC = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DEP$ 中, $DP = \sqrt{DE^2 + EP^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

(2) 过点 D 作 $DE \perp AC$ 交 AC 于点 E .

①如图2, 当 P 在 EC 上时,

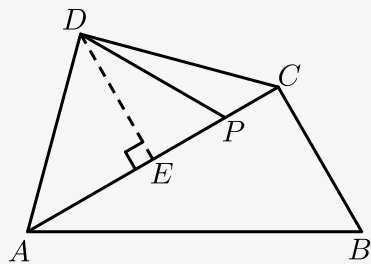


图2

$$\because BC = \sqrt{3}, PD = BC,$$

$$\therefore PD = \sqrt{3},$$

$$\because DE = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DEP \text{ 中, } EP = \sqrt{PD^2 - DE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore EP = \frac{1}{2}PD, \text{ 即 } \angle EDP = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PDA = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ.$$

②如图3, 当P在AE上时,

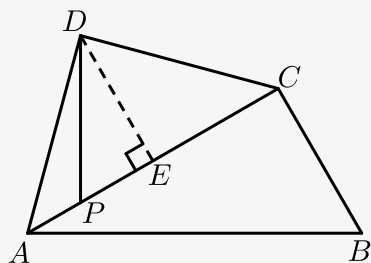


图3

同理可得 $\angle EDP = 30^\circ$,

$$\therefore \angle PDA = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

综上所述, $\angle PDA = 75^\circ$ 或 15° .

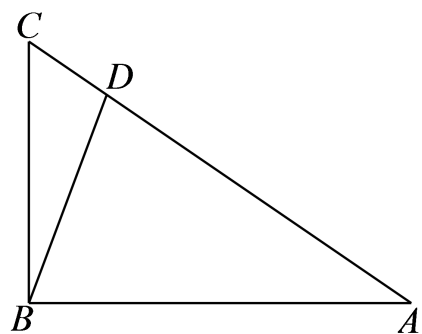
【标注】【知识点】勾股定理应用

【重点强调】

2018~2019学年3月天津南开区天津市南开中学初二下学期月考第24题15分

典题精练3

9. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 20$, $BC = 15$, 点D是AC边上一动点, 点D从点C出发, 沿边CA向点A运动, 当点D到达点A时停止, 若点D的运行时间为t秒, 点D的运动速度为每秒2个单位长度.



(1) 填空：当 $t = 2$ 时， $CD = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $AD = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2) 求当 t 为何值时， $\triangle CBD$ 为直角三角形，并说明理由。

【答案】 (1) 4; 21

(2) $t = 4.5$ 或 12.5 时， $\triangle CBD$ 为直角三角形，证明见解析。

【解析】 (1) $CD = 2 \times 2 = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 25,$$

$$\therefore AD = AC - CD = 21.$$

(2) $t = 4.5$ 或 12.5 时， $\triangle CBD$ 为直角三角形。

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \angle CDB = 90^\circ \text{ 时, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AB \cdot BC,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 25 \cdot BD = \frac{1}{2} \times 20 \times 15,$$

$$\text{解得 } BD = 12,$$

在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中，

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

$$t = 9 \div 2 = 4.5.$$

$\textcircled{2}$ 当 $\angle CBD = 90^\circ$ 时，点 D 和点 A 重合，

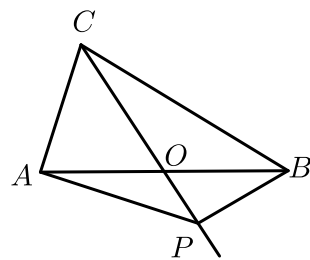
$$t = 25 \div 2 = 12.5.$$

综上所述， $t = 4.5$ 或 12.5 时， $\triangle CBD$ 为直角三角形。

【标注】【知识点】勾股定理

过关斩将

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 4$ ， $AO = BO$ ， P 是射线 CO 上的一个动点， $\angle AOC = 60^\circ$ ，则当 $\triangle PAB$ 为直角三角形时， AP 的长为 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。



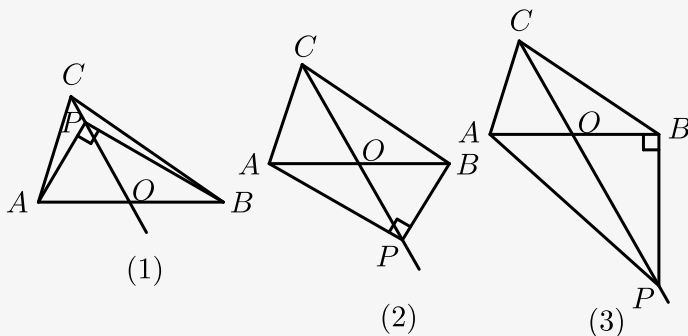
【答案】 $2, 2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$

【解析】 如图，分三种情况讨论：

图(1)中， $\angle APB = 90^\circ$ ，
 $\because AO = BO, \angle APB = 90^\circ$ ，
 $\therefore PO = AO = BO = 2$ ，
 又 $\angle AOC = 60^\circ$ ，
 $\therefore \triangle APO$ 是等边三角形，
 $\therefore AP = 2$ ；

图(2)中， $\angle APB = 90^\circ$ ，
 $\because AO = BO, \angle APB = 90^\circ$ ，
 $\therefore PO = AO = BO = 2$ ，
 又 $\angle AOC = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAP = 30^\circ$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中， $AP = \cos 30^\circ \times 4 = 2\sqrt{3}$ ，

图(3)中， $\angle ABP = 90^\circ$ ，
 $\because BO = AO = 2, \angle BOP = \angle AOC = 60^\circ$ ，
 $\therefore PB = 2\sqrt{3}$ ，
 $\therefore AP = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$ ，
 $\therefore AP$ 的长为 $2, 2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$ 。

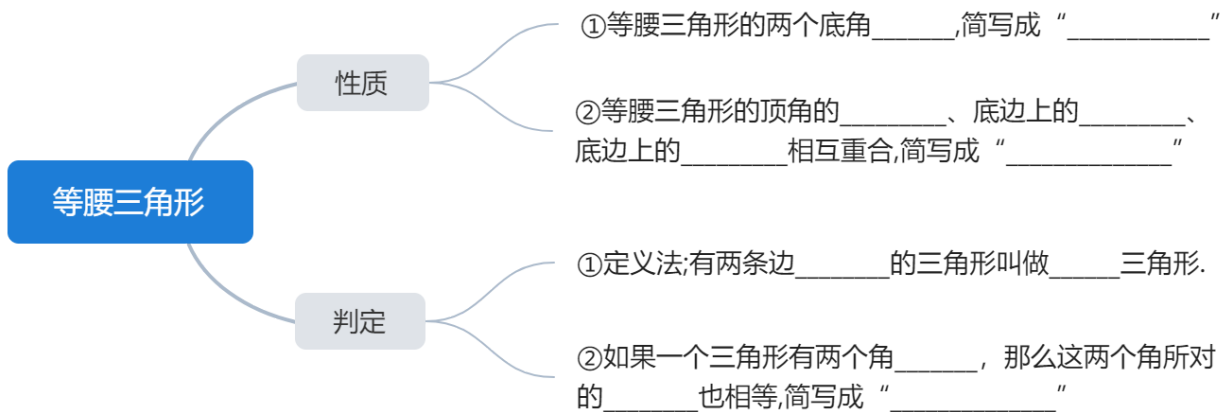


【标注】 【知识点】解直角三角形的综合应用

【重点强调】

2019年天津和平区初三二模第17题3分

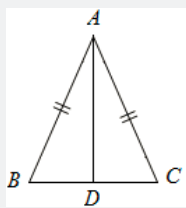
二、等腰三角形



教法备注

1.等腰三角形的性质

性质1: 等腰三角形的两个底角相等(简写成“等边对等角”).



书写: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle C$ (等边对等角).

性质2: 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合(简写成“三线合一”).

书写: $\because AB = AC, BD = CD$,

$\therefore AD \perp BC, \angle BAD = \angle CAD$ (三线合一).

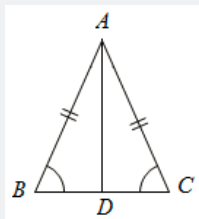
【注意】

1. 如果要应用“三线合一”性质作辅助线,所作辅助线不能同时满足两条线的性质,如不能既作中线又作高,可通过作中线求证垂直或作高求证中线.
2. 等腰三角形是轴对称图形,其顶角平分线、底边上的中线、底边上的高线所在直线是对称轴.

2.等腰三角形的判定

①利用定义来判定: 有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.

②判定定理：如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等
(简称“等角对等边”)。



书写： $\because \angle B = \angle C$

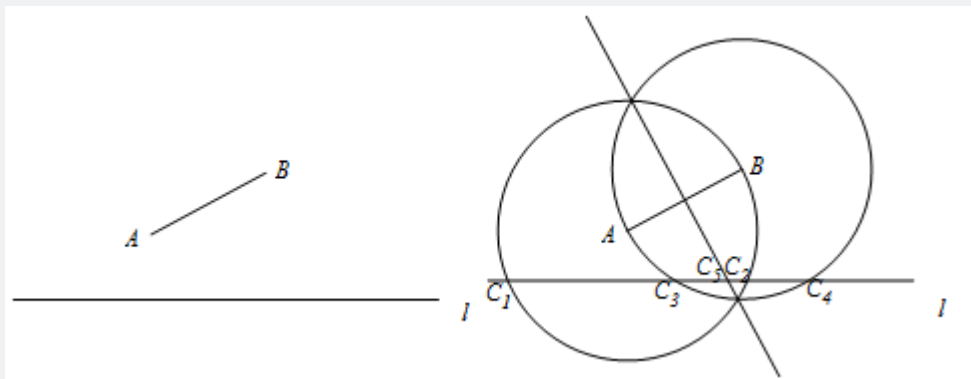
$\therefore AB = AC$ (等角对等边)。

【注意】：

3.等腰三角形存在性(两圆一线)

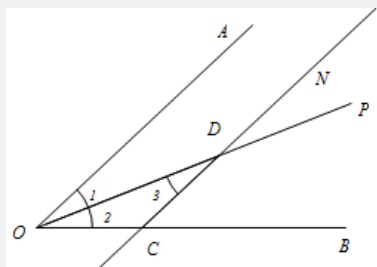
如图所示，在直线 l 上找一点 C ，使得 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

- (1) $AB = AC$ ，以 A 为圆心， AB 为半径画圆，交直线 l 于两点 C_1 、 C_2 ，
- (2) $AB = BC$ ，以 B 为圆心， AB 为半径画圆，交直线 l 于两点 C_3 、 C_4 ，
- (3) $AC = BC$ ，作 AB 的中垂线交直线 l 于 C_5 。

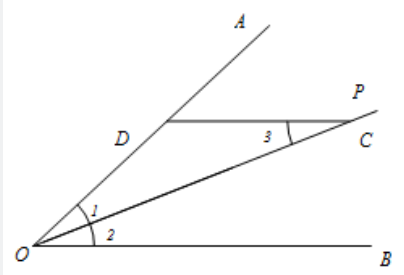


4. “角平分线+平行线” → 等腰三角形

如图所示， OP 平分 $\angle AOB$ ， $CD \parallel OA$ ，则 $\triangle OCD$ 是等腰三角形。

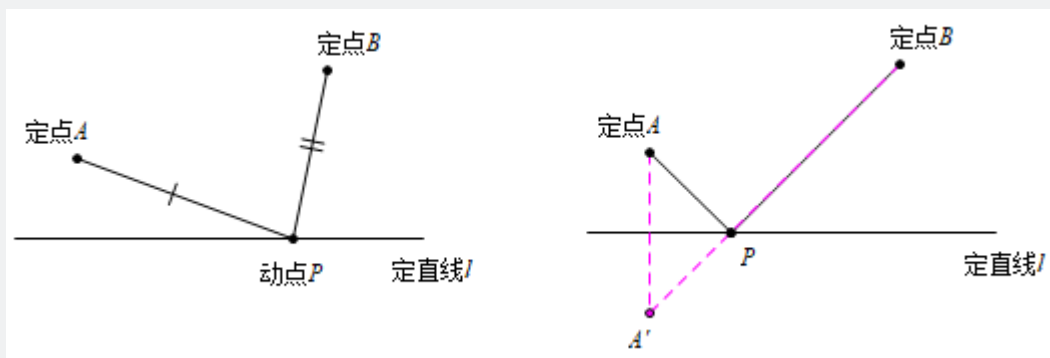


如图所示， OP 平分 $\angle AOB$ ， $CD \parallel OB$ ，则 $\triangle OCD$ 是等腰三角形。



【补充】：

如图，在定直线 l 上找一动点 P ，使点 P 到两定点 A 与 B 的距离之和最小，即 $PA + PB$ 最小。

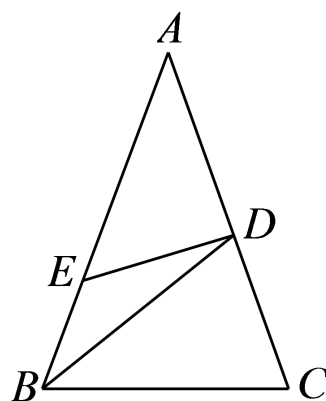


作对称点的作用：

1. 将直线同侧两点问题转化为直线异侧两点问题；
2. 利用轴对称的性质可以将相等的线段转化。

典题精练1

11. 如图，已知在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = BD$ ， $AD = DE = EB$ ，则 $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 45°

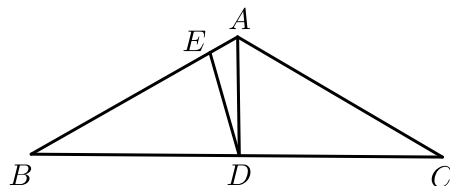
【解析】 $\because DE = EB$ ，

$\therefore$ 设 $\angle BDE = \angle ABD = x$ ，

$\therefore \angle AED = \angle A = 2x$,
 $\therefore \angle BDC = \angle C = \angle ABC = 3x$,
 在 $\triangle ABC$ 中 , $3x + 3x + 2x = 180^\circ$,
 计算得出 $x = 22.5^\circ$,
 $\therefore \angle A = 2x = 22.5^\circ \times 2 = 45^\circ$,
 因此 , 本题正确答案是 : 45° .

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

12. 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$, AD 是 BC 边上的中线 , 点 E 在 AB 上 , 且 $BD = BE$, 则 $\angle AED = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



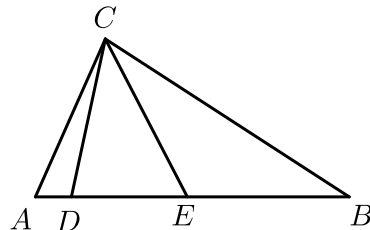
【答案】 105

【解析】 根据 $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$, 可得 $\angle B = \angle C = 30^\circ$,
 根据 $BD = BE$, 可得 $\angle BED = \angle BDE = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$
 因此 $\angle AED = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

🕒 经典再现

13. 如图 , 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , D , E 为斜边 AB 上的两个点 , 且 $BD = BC$, $AE = AC$, 则 $\angle DCE$ 的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 45°

【解析】 依题可知 $BD = BC$, $AE = AC$, $\angle BDC = \angle BCD$, $\angle AEC = \angle ACE$.

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle A + \angle B = 90^\circ.$$

$$2(\angle BDC + \angle AEC) = 180^\circ - \angle B + 180^\circ - \angle A = 360^\circ - (\angle A + \angle B) = 270^\circ.$$

$$\angle BDC + \angle AEC = 135^\circ, \angle DCE = 180^\circ - (\angle BDC + \angle AEC) = 45^\circ.$$

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

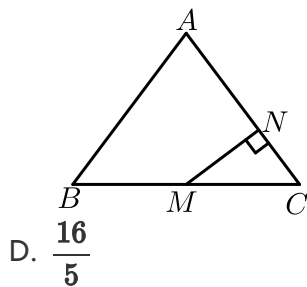
【重点强调】

2014年天津中考第17题（3分）

等边对等角，外角定理内角和定理结合，可设未知数简化过程

典题精练2

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，点 M 为 BC 的中点， $MN \perp AC$ 于点 N ，则 MN 等于（ ）.



A. $\frac{6}{5}$

B. $\frac{9}{5}$

C. $\frac{12}{5}$

D. $\frac{16}{5}$

【答案】C

【解析】连接 AM ，

$\because AB = AC$ ，点 M 为

BC 中点，

$\therefore AM \perp CM$ （三线合

一）， $BM = CM$ ，

$\because AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，

$\therefore BM = CM = 3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中，

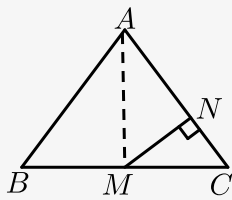
$AB = 5$ ， $BM = 3$ ，

$\therefore$ 根据勾股定理得：

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\text{又 } S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}MN \cdot AC = \frac{1}{2}AM \cdot MC,$$

$$\therefore MN = \frac{AM \cdot CM}{AC} = \frac{12}{5}.$$

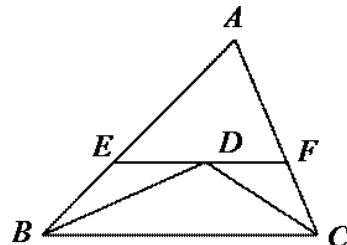


【标注】【知识点】直接用勾股求边长

【重点强调】

2017~2018学年3月天津河西区天津市第四十二中学初二下学期月考第2题3分

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, DB 平分 $\angle ABC$, DC 平分 $\angle ACB$, 过 D 作直线 $EF \parallel BC$, 交 AB 、 AC 于 E , F . 若 $AB = 8$, $AC = 7$, 则 $\triangle AEF$ 的周长为 _____.



【答案】 15

【解析】 $\because EF \parallel BC$,

$$\therefore \angle EDB = \angle DBC,$$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle EBD = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle EBD,$$

$$\therefore BE = ED,$$

同理 $DF = CF$,

$$\triangle AEF \text{ 的周长是 } AE + EF + AF$$

$$= AE + ED + DF + AF$$

$$= AE + BE + CF + AF$$

$$= AB + AC$$

$$= 8 + 7$$

$$= 15.$$

故答案为: 15.

【标注】【知识点】平行线的性质

【知识点】角分线性质定理

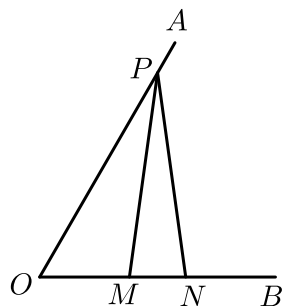
【知识点】求多边形周长与面积

【知识点】三角形的周长与面积问题

【能力】推理论证能力

 过关斩将

16. 如图, 已知 $\angle AOB = 60^\circ$, 点 P 在边 OA 上, $OP = 10$, 点 M, N 在边 OB 上, $PM = PN$, 若 $MN = 2$, 则 OM 等于().



- A. $5\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{3} - 1$ C. 5 D. 4

【答案】 D

【解析】 过 P 作 $PH \perp MN$,

$$\because PM = PN, MN = 2,$$

$$\therefore MH = 1,$$

$$\because \angle AOB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OPH = 30^\circ,$$

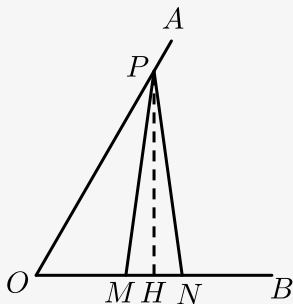
$$\therefore HO = \frac{1}{2}PO,$$

$$\because OP = 10,$$

$$\therefore HO = 5,$$

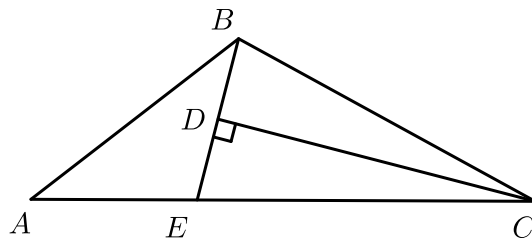
$$\therefore MO = 4,$$

故选: D.



【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

17. 如图, D 为 $\triangle ABC$ 内一点, CD 平分 $\angle ACB$, $BE \perp CD$, 垂足为点 D , 交 AC 于点 E , $\angle A = \angle ABE$, $AC = 5$, $BC = 3$, 则 BD 的长为().



A. 1

B. 1.5

C. 2

D. 2.5

【答案】 A

【解析】 $\because CD$ 平分 $\angle ACB$, $BE \perp CD$,

$$\therefore BC = CE.$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle ABE,$$

$$\therefore AE = BE.$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} (AC - BC).$$

$$\because AC = 5, BC = 3,$$

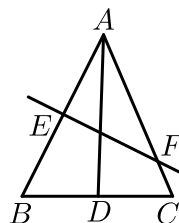
$$\therefore BD = \frac{1}{2} (5 - 3) = 1.$$

故选：A.

【标注】 【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

💡 典题精练3

18. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 5$, $S_{\triangle ABC} = 15$, $AD \perp BC$ 于点 D , EF 垂直平分 AB , 交 AC 于点 F , 在 EF 上确定一点 P , 使 $PB + PD$ 最小, 则这个最小值为 _____.



【答案】 6

【解析】 $\because AB = AC$, $BC = 5$, $S_{\triangle ABC} = 15$, $AD \perp BC$ 于点 D ,

$$\therefore AD = 6,$$

$$\because EF \text{ 垂直平分 } AB,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 到 } A, B \text{ 两点的距离相等},$$

$$\therefore AD \text{ 的长度} = PB + PD \text{ 的最小值},$$

即 $PB + PD$ 的最小值为 6 .

故答案为 : 6 .

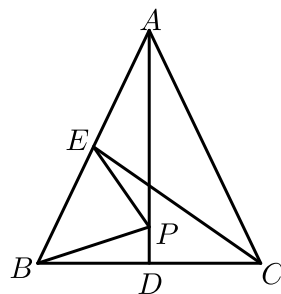
【标注】【知识点】线段和的最小值

【重点强调】

2019~2020 学年天津南开区南开大学附属中学初二上学期期末第 16 题 3 分

经典再现

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD , CE 是 $\triangle ABC$ 的两条中线, P 是 AD 上的一个动点, 则下列线段的长等于 $BP + EP$ 最小值的是 () .



A. BC

B. CE

C. AD

D. AC

【答案】B

【解析】 $\because AB = AC$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形,

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 中线,

$\therefore AD$ 是线段 BC 的中垂线,

$\therefore BP = CP$,

故 $BP + EP$ 最小值就是求 $EP + CP$ 最小值,

$\therefore$ 当 E, P, C 共线时和最小, 即 CE 的长度.

故选 B .

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

【能力】推理论证能力

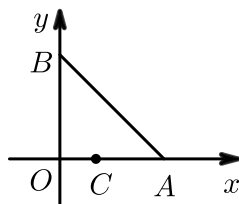
【重点强调】

2017 年天津中考第 11 题 (3 分)

将军饮马模型, 三线合一推导垂直平分线

 典题精练4

20. 如图，平面直角坐标系 xOy 中，已知定点 $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ ，若动点 C 在 x 轴上运动，则使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的点 C 有()个.



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 C

【解析】 $\because A(1,0)$ 、 $B(0,1)$,

$$\therefore OA = OB = 1, AB = \sqrt{2},$$

设 C 点坐标为 $(x,0)$ ，则 $AC = |x - 1|$ ，

当 $BC = AC$ 时，可知点 C 在线段 AB 的垂直平分线上，

可知点 C 在 O 点，即此时点 C 为 $(0,0)$ ，

当 $BC = AB$ 时，此时 $\angle BCA = \angle BAC = 45^\circ$ ，

可求得 $OC = 1$ ，此时点 C 为 $(-1,0)$ ，

当 $AB = AC$ 时，即 $|x - 1| = \sqrt{2}$ ，

可解得 $x = \sqrt{2} + 1$ 或 $x = 1 - \sqrt{2}$ ，

此时 C 点坐标为 $(1 + \sqrt{2}, 0)$ 或 $(1 - \sqrt{2}, 0)$ ，

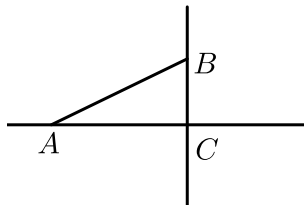
综上可知点 C 的位置有4个，

故选C.

【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

 过关斩将

21. 如图：已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，在直线 AC 上找点 P ，使 $\triangle ABP$ 是等腰三角形，则 $\angle APB$ 的度数为 _____.



【答案】 15° 、 30° 、 75° 、 120°

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

$\therefore$ 当 $AB = BP_1$ 时, $\angle BAP_1 = \angle BP_1A = 30^\circ$,

当 $AB = AP_3$ 时, $\angle ABP_3 = \angle AP_3B = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ$,

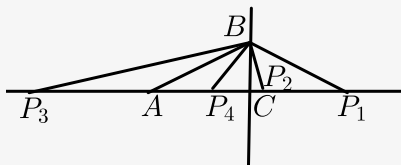
当 $AB = AP_2$ 时, $\angle ABP_2 = \angle AP_2B = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$,

当 $AP_4 = BP_4$ 时, $\angle BAP_4 = \angle ABP_4$,

$\therefore \angle AP_4B = 180^\circ - 30^\circ \times 2 = 120^\circ$,

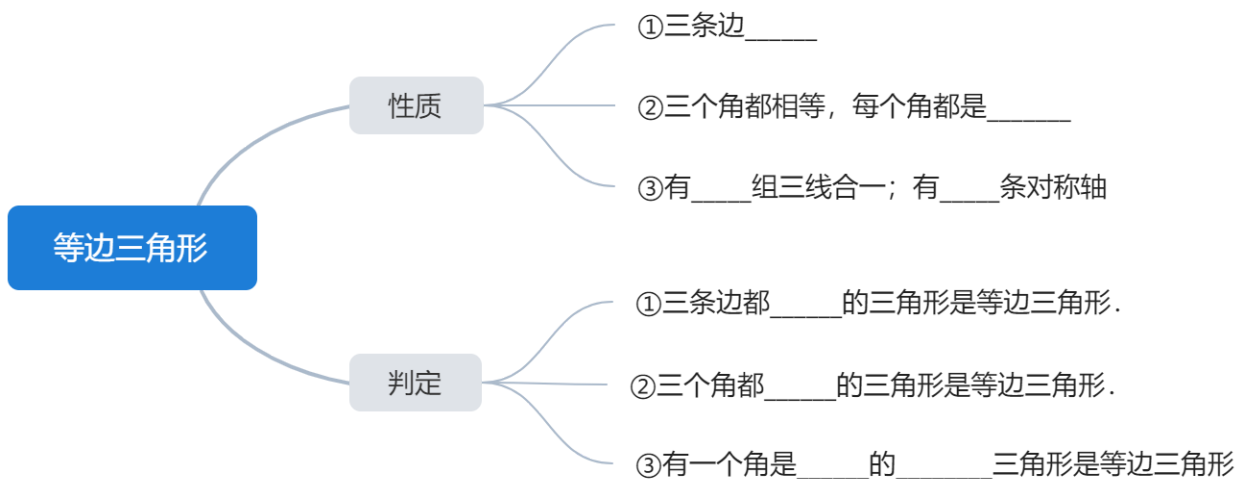
$\therefore \angle APB$ 的度数为: 15° 、 30° 、 75° 、 120° .

故答案为: 15° 、 30° 、 75° 、 120° .



【标注】 【知识点】 等腰三角形的存在性

三、等边三角形



教法备注

1. 等边三角形的性质:

- ①三条边相等
- ②三个角都相等, 每个角都是 60°
- ③有3组三线合一; 有3条对称轴

2. 等边三角形的判定:

- ①三条边都相等的三角形是等边三角形．
- ②三个角都相等的三角形是等边三角形．
- ③有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形．

书写：

在 $\triangle ABC$ 中

$$\because AB = AC, \angle A = 60^\circ$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

3.含 30° 的直角三角形：

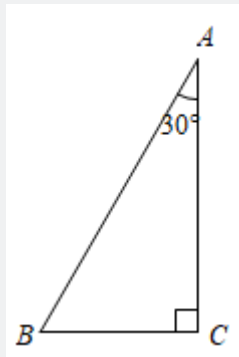
在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的直角边等于斜边的一半．

符号语言：

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AB$$

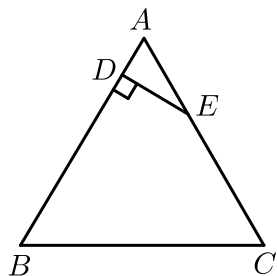


【注意】

此性质适用的大前提“直角三角形”，所以无直角时，必须依据条件构造符合性质特征的直角三角形，才能根据角的大小，得到边的倍分关系．

典题精练1

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ，点 D 在 AB 边上， $DE \perp AB$ ，并与 AC 边交于点 E ．如果 $AD = 1$ ， $BC = 6$ ，那么 CE 的长为（ ）．



A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】B

【解析】 $\because$ 等边 $\triangle ABC$ ，

$$\therefore \angle A = 60^\circ, BC = AC = 6.$$

$$\therefore DE \perp AD, AD = 1,$$

$$\therefore AE = 2,$$

$$\therefore CE = 4.$$

【标注】【能力】推理论证能力

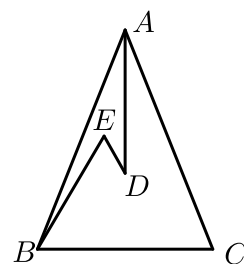
【知识点】等边三角形的性质

【知识点】30°特殊角的性质应用

【重点强调】

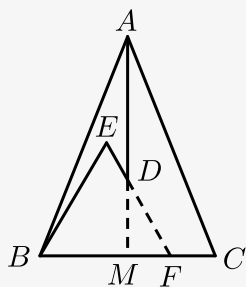
2017~2018学年天津滨海新区初二上学期期末第6题3分

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 、 E 是 $\triangle ABC$ 内的两点， AD 平分 $\angle BAC$ ， $\angle EBC = \angle E = 60^\circ$ ，若 $BE = 6\text{cm}$ ， $DE = 2\text{cm}$ ，则 $BC = \underline{\hspace{1cm}}\text{cm}$ 。



【答案】8

【解析】延长 AD 交 BC 于 M ，延长 ED 交 BC 于 F ，



因为 $\angle EBC = \angle E = 60^\circ$ ，

所以 $\triangle BEF$ 是等边三角形，

$\therefore AB = AC$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore AM \perp BC$ ，

又因为 $AM \perp BC$ ，

所以 $\angle MDF = 30^\circ$ ，

因为 $BE = 6\text{cm}$ ， $DE = 2\text{cm}$ ，

所以 $DF = 4\text{cm}$ ，

所以 $MF = 2\text{cm}$

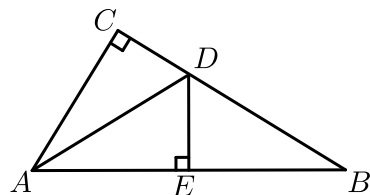
所以 $BM = BF - MF = 6 - 2 = 4\text{cm}$,

所以 $BC = 2BM = 8(\text{cm})$.

【标注】【知识点】等腰及等边三角形的综合

🔗 过关斩将

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$, 垂足为 E , $DE = 1$, 则 $BC = (\quad)$.



A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. 3

D. $\sqrt{3} + 2$

【答案】C

【解析】方法一：根据角平分线的性质可得 $CD = DE = 1$,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AD = 2DE = 2$,

根据题意可得 $\triangle ADB$ 为等腰三角形, 则 DE 为 AB 的中垂线, 则 $BD = AD = 2$,

则 $BC = CD + BD = 1 + 2 = 3$.

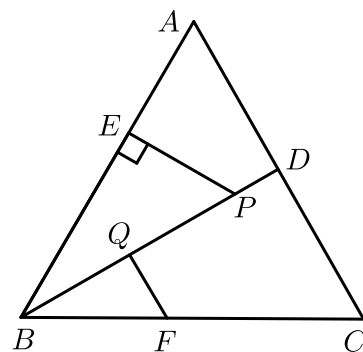
方法二：可通过 30° 角来得到 $BD = 2DE = 2$, 则 $BC = CD + BD = 3$.

【标注】【知识点】角分线性质定理

【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

【知识点】作线段的垂直平分线

25. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, P 是 $\angle ABC$ 的平分线 BD 上一点, $PE \perp AB$ 于点 E , 线段 BP 的垂直平分线交 BC 于点 F , 垂足为点 Q . 若 $BQ = 2$, 则 PE 的长为 _____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 根据等边三角形的性质可得： $\angle EBP = \angle QBF = 30^\circ$ ，根据 $BF = 2$ 可得： $BQ = \sqrt{3}$ ，根据点 Q 为中点可得： $BP = 2BQ = 2\sqrt{3}$ ，则 $PE = \sqrt{3}$ 。

【标注】 【能力】 运算能力

【思想】 数形结合思想

【知识点】 等边三角形的性质

【知识点】 线段的垂直平分线的性质定理

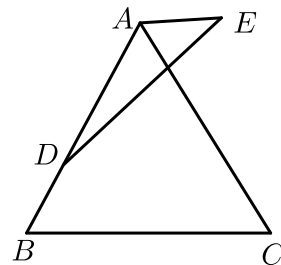
【知识点】 角分线性质定理

【重点强调】

2019年天津河东区初三一模第17题3分

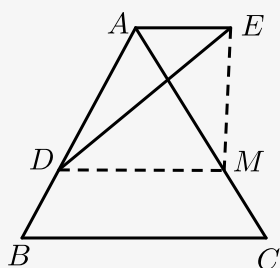
典题精练2

26. 如图，在边长为3的等边 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 边上一点， $BD = \frac{1}{3}AB$ ， $AE \parallel BC$ ， $AE = BD$ ，连接 DE ，则 DE 的长是 _____。



【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】 过 D 作 $DM \parallel BC$ 交 AC 于点 M ，连接 EM ，



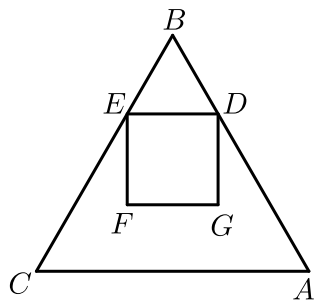
$\because DM \parallel BC, AE \parallel BC,$
 $\therefore AE \parallel DM,$
 $\therefore \angle AEM = 90^\circ,$
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中, 由勾股定理知,
 $EM^2 = AM^2 - AE^2,$
 $\therefore EM = \sqrt{3},$
 $\because \angle DME = 90^\circ,$
 $\therefore$ 在 $\triangle DME$ 中,
 $DE^2 = EM^2 + DM^2,$
 $\therefore DE = \sqrt{3 + 2^2} = \sqrt{7},$
 $\therefore DE = \sqrt{7}.$

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

【重点强调】

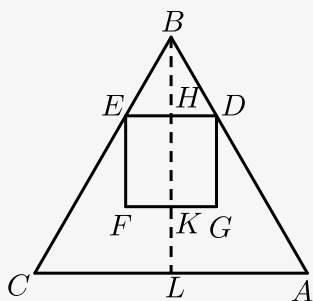
2018年天津北辰区初三一模第17题3分

27. $\triangle ABC$ 是边长为18的正三角形, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上, 且 $BD = BE$, 若四边形 $DEFG$ 是边长为6的正方形时, 则点 F 到 AC 的距离等于 _____.



【答案】 $6\sqrt{3} - 6$

【解析】 如图：



$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle A = \angle ABC = 60^\circ$ ，
 $\therefore BD = BE$ ，
 $\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle BDE = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle A = \angle BDE$ ，
 $\therefore AC \parallel DE$ ，
 $\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是正方形， $GF = 6$ ，
 $\therefore DE \parallel GF$ ，
 $\therefore AC \parallel DE \parallel GF$ ，
 $\therefore KL = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6 = 6\sqrt{3} - 6$ ，
 $\therefore F$ 点到 AC 的距离为 $6\sqrt{3} - 6$ 。

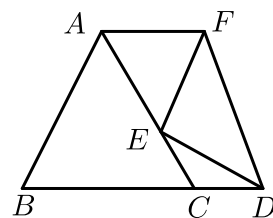
【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】等边三角形的性质

【重点强调】

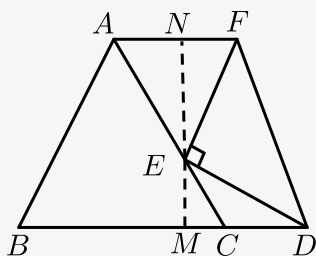
2017年天津滨海新区初三一模第17题3分

28. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $AB = 3$ ，点 E 在 AC 上， $AE = \frac{2}{3}AC$ ， D 是 BC 延长线上一点，将线段 DE 绕点 E 逆时针旋转 90° 得到线段 FE 。当 $AF \parallel BD$ 时，线段 AF 的长为 _____。



【答案】 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】如图，



过 E 点作 AF ， BC 垂线分别交 BC 于 M ， AF 于 N ，

$$\therefore \angle NEF + \angle NFE = 90^\circ,$$

$$\angle NEF + \angle MED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NFE = \angle MED,$$

$\therefore$ 在 $\triangle NEF$ 和 $\triangle MED$ 中，

$$\begin{cases} \angle NFE = \angle MED \\ \angle ENF = \angle EMD, \\ EF = ED \end{cases}$$

$$\therefore \triangle NEF \cong \triangle MED (\text{AAS}),$$

$$\therefore NF = EM,$$

$$\therefore AE = \frac{2}{3}AC,$$

$$\therefore AE = 2, CE = 1,$$

$$\therefore AF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle NAE = \angle BCA = 60^\circ,$$

$$\therefore NF = EM = CE \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又} \therefore AN = AE \cos 60^\circ = 1,$$

$$\therefore AF = AN + NF = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

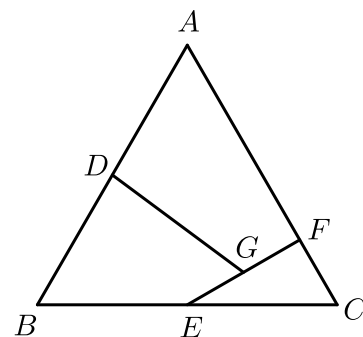
【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

【重点强调】

2020年天津和平区初三二模第17题3分

经典再现

29. 如图，在边长为4的等边 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别为 AB ， BC 的中点， $EF \perp AC$ 于点 F ， G 为 EF 的中点，连接 DG ，则 DG 的长为 _____ .



【答案】 $\frac{\sqrt{19}}{2}$

【解析】如图，连接 DE ，

$\because D, E$ 分别为 AB, BC 的中点，

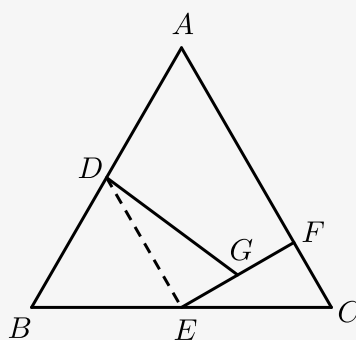
$\therefore DE \parallel AC, DE = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore DE = 2, EC = 2$ ，

$\angle DEB = \angle C = 60^\circ$ ，

$\because EF \perp AC$ ，

$\therefore \angle FEC = 30^\circ, \angle DEF = 90^\circ$



$\therefore EC = 2$ ，

$\therefore FC = 1, EF = \sqrt{3}$ ，

$\because G$ 为 EF 的中点，

$\therefore EG = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\because DE = 2, \angle DEG = 90^\circ$ ，

$\therefore DG = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$ 。

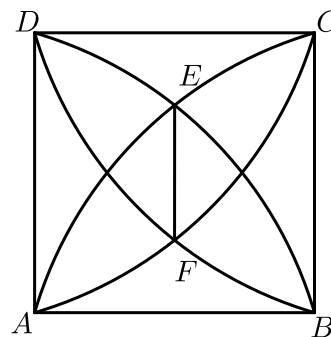
【标注】【知识点】直接用勾股求边长

【重点强调】

2018年天津中考第17题（3分）

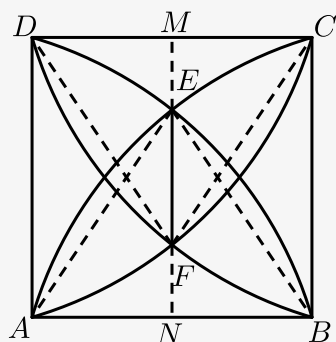
等边三角形的性质，勾股定理

30. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为1，以顶点 $A、B$ 为圆心，1为半径的两弧交于点 E ，以顶点 $C、D$ 为圆心，1为半径的两弧交于点 F ，则 EF 的长为 _____。



【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】 连接 AE, BE, DF, CF .



$\therefore$ 以顶点 A, B 为圆心, 1 为半径的两弧交于点 $E, AB = 1$,

$\therefore AB = AE = BE$.

$\therefore \triangle AEB$ 是等边三角形,

$\therefore$ 边 AB 上的高线为 $EN = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

延长 EF 交 AB 于 N , 并反向延长 EF 交 DC 于 M , 则 E, F, M, N 共线,

则 $EM = 1 - EN = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore NF = EM = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore EF = 1 - EM - NF = \sqrt{3} - 1$.

【标注】【知识点】正多边形与圆

【重点强调】

2012年天津中考真题第17题