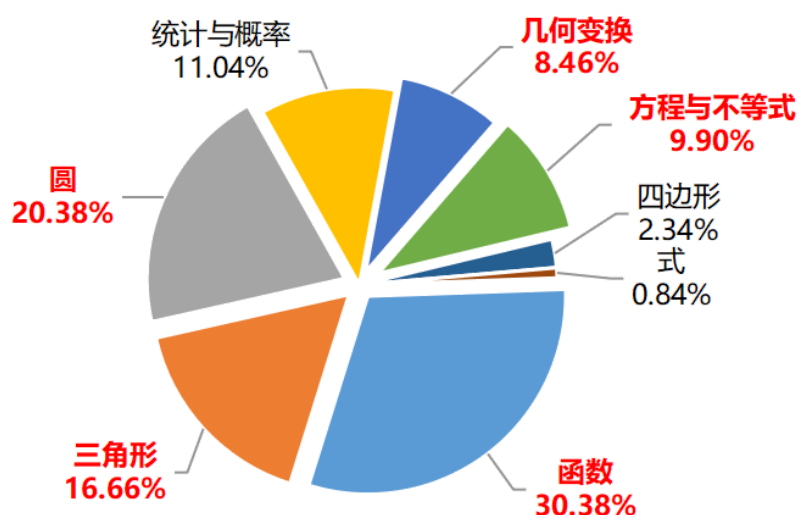


综合复习（一）

本模块《综合复习》属于人教版教材第二十一、二十二、二十三、二十四、二十七章的内容，是期末考试的重要考察点，重点包括一元二次方程、二次函数、旋转、圆、相似三角形五部分，需要学生在理解概念、性质的基础上进行灵活的运用。

本模块难度适中，适用于基础知识的巩固，本模块为综合复习一（一元二次方程与二次函数部分）、综合复习二（旋转、圆、相似三角形部分），加油站与讲义内容完全对照，帮助学生继续巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
一元二次方程	★★★	中
二次函数	★★★★	高
旋转	★★★★	高
圆	★★★★	高
相似三角形	★★★★	高

一、一元二次方程

1. 一元二次方程的定义

一元二次方程

一元二次方程概念：只含有_____，并且未知数的最高次数是_____的_____方程，叫做一元二次方程。

一元二次方程的一般式：_____，_____为二次项系数；_____为一次项系数，_____为常数项。

一元二次方程的根：使方程左右两边_____的未知数的值就是这个一元二次方程的_____，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的_____。

2. 一元二次方程解法

直接开方法

一般地，对于方程 $x^2 = p$

当 $p > 0$ 时，根据平方根的意义，方程有两个不等的实数根 $x_1 = -\sqrt{p}$ ， $x_2 = \sqrt{p}$ ；

当 $p = 0$ 时，方程有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = 0$ ；

当 $p < 0$ 时，因为对任意实数 x ，都有 $x^2 \geq 0$ ，所以方程无实数根。

配方法

解题步骤：

①移项：把方程中含有未知数的项移到方程的左边，常数项移到方程的右边；

②二次项系数化为1：根据等式的性质把二次项的系数化为"1"；

③配方：把方程两边都加上一次项系数的一半的平方，使左边配成一个完全平方式；

④开平方：运用直接开平方方法解方程。

公式法

一元二次方程 判别式

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$
(a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)，
由配方法可得_____

当 $\Delta = \underline{\hspace{2cm}}$ ，方程有 个 的实数根

当 $\Delta = \underline{\hspace{2cm}}$ ，方程有 个 的实数根

当 $\Delta = \underline{\hspace{2cm}}$ ，方程 实数根

当 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实数根可写为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式。

因式分解法

因式分解法的一般步骤：

- ①将方程化为一元二次方程的一般形式；
- ②把方程的左边分解为两个 一次因式的积；
- ③令每个因式为 0，得到两个一元一次方程；
- ④解这两个一元一次方程得原方程的解。

3. 根与系数的关系

当 $\Delta \geq 0$ ，方程的两个根 x_1, x_2 和系数 a, b, c 有如下关系：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

栗子

1. 方程① $2x^2 - 9 = 0$ ② $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$ ③ $xy + x^2$ ④ $7x + 6 = x^2$ ⑤ $ax^2 + bx + c = 0$ 中，一元二次方程的个数是（ ）。
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 B

【解析】 ②为分式方程，一元二次方程为整式方程，故不符合题意；③为代数式，不为等式，不符合题意；⑤中 a 可能为0，若 $a = 0$ 则不为一元二次方程，不符合题意；因此一元二次方程为①④，有2个，故选B。

【标注】 【思想】 方程思想

【能力】 抽象概括能力

【知识点】 一元二次方程的定义

2. 若关于 x 的一元二次方程为 $ax^2 + bx + 5 = 0 (a \neq 0)$ 的解是 $x = 1$ ，则 $2013 - a - b$ 的值是（ ）。
- A. 2018 B. 2008 C. 2014 D. 2012

【答案】 A

【解析】 $\because x = 1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 的一个根，

$$\therefore a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 5 = 0,$$

$$\therefore a + b = -5,$$

$$\therefore 2013 - a - b = 2013 - (a + b) = 2013 - (-5) = 2018.$$

故选：A.

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

3. 把一元二次方程 $(1-x)(2-x) = 3 - x^2$ 化成一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 其中 a 、 b 、 c 分别为 () .

A. 2、3、-1

B. 2、-3、-1

C. 2、-3、1

D. 2、3、1

【答案】B

【解析】原方程可整理为： $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ，

$$\therefore a = 2, b = -3, c = -1.$$

故选：B.

【标注】【知识点】一元二次方程的一般形式

4. 若关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 5x + m^2 - 3m + 2 = 0$ 的常数项为0，则 m 的值等于 () .

A. 1

B. 2

C. 1或2

D. 0

【答案】B

【解析】根据题意，知，

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases}$$

解方程得： $m = 2$.

故选：B.

【标注】【知识点】一元二次方程系数的判断

5. 已知 $x = -1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx - 10 = 0$ 的一个解，且 $a \neq -b$ ，则 $\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b}$ 的值为 _____ .

【答案】5

【解析】 $\because x = -1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx - 10 = 0$ 的一个解，

$$\therefore a - b - 10 = 0,$$

$$\therefore a - b = 10 ,$$

$$\therefore a \neq -b ,$$

$$\therefore a + b \neq 0 ,$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2}{2a + 2b} = \frac{(a + b)(a - b)}{2(a + b)} = \frac{a - b}{2} = \frac{10}{2} = 5 ,$$

故答案是：5 .

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

6. 已知 a 是 $x^2 - 2009x + 1 = 0$ 的根，求 $a^2 - 2008a - \frac{a^2 + 1}{2009}$ 的值 .

【答案】 -1.

【解析】 $\therefore a^2 + 1 = 2009a ,$

$$\text{原式} = a^2 - 2008a - a$$

$$= a^2 - 2009a$$

$$= -1 .$$

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

栗子

7. 用公式法解方程 .

(1) $5x^2 - 7x + 2 = 0 .$

(2) $2x^2 + 3x - 3 = 0 .$

(3) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 .$

(4) $2x^2 + 3x + 4 = 0 .$

【答案】 (1) $x_1 = 1 , x_2 = \frac{2}{5} .$

(2) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4} , x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{4} .$

(3) $x_1 = \sqrt{2} + 1 , x_2 = \sqrt{2} - 1 .$

(4) 方程无实数根 .

【解析】 (1) $\Delta = 49 - 40 = 9 ,$

$$x_1 = \frac{7 + 3}{10} = 1 , x_2 = \frac{7 - 3}{10} = \frac{2}{5} .$$

(2) $\Delta = 9 + 24 = 33 ,$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{4}.$$

$$(3) \Delta = 8 - 4 = 4,$$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1,$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

$$(4) \Delta = 9 - 32 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根.

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

8. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m - 3)x - m = 0$,

(1) 求证：方程有两个不相等的实数根.

(2) 如果方程的两实根为 x_1 、 x_2 ，且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$ ，求 m 的值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 1, 2.

【解析】(1) $\because \Delta = m^2 - 2m + 9 = (m - 1)^2 + 8 > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

(2) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$ 变形可得 $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$,

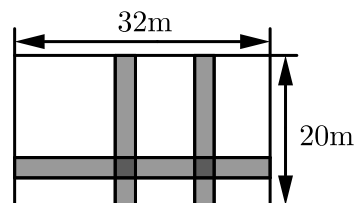
利用韦达定理代入可求得 $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

故答案为：1, 2.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子

9. 如图，某小区计划在一块长为32m，宽为20m的矩形空地上修建三条同样宽的道路，剩余的空地上种植草坪，使草坪的面积为570m². 若设道路的宽为 x m，则下面所列方程正确的是 ().



A. $(32 - 2x)(20 - x) = 570$

B. $32x + 2 \times 20x = 32 \times 20 - 570$

C. $(32 - x)(20 - x) = 32 \times 20 - 570$

D. $32x + 2 \times 20x - 2x^2 = 570$

【答案】A

【解析】设道路的宽为 x m，根据题意得： $(32 - 2x)(20 - x) = 570$.

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

10. 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队都要比赛一场．根据场地和时间等条件，赛程计划安排7天，每天安排4场比赛，设比赛组织者应邀请 x 个队参赛，则 x 满足的关系式为（ ）．

A. $\frac{1}{2}x(x+1) = 28$

B. $\frac{1}{2}x(x-1) = 28$

C. $x(x+1) = 28$

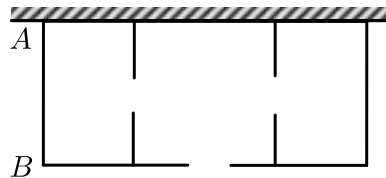
D. $x(x-1) = 28$

【答案】B

【解析】单循环的比赛，每个队都要与剩余的对打一场比赛，比赛组织者应邀请 x 个队参赛， $\frac{1}{2}x(x-1) = 28$.

【标注】【知识点】一元二次方程的握手、送礼物问题

11. 某建筑工程队在工地一边靠墙处，用81米长的铁栅栏围成三个相连的长方形仓库，仓库总面积为440平方米．为了方便取物，在各个仓库之间留出了1米宽的缺口作通道，在平行于墙的一边留下一个1米宽的缺口作小门，若设 $AB = x$ 米，则可列方程（ ）．



A. $x(81 - 4x) = 440$ B. $x(78 - 2x) = 440$ C. $x(84 - 2x) = 440$ D. $x(84 - 4x) = 440$

【答案】D

【解析】 $x[81 - x - x - (x - 1) - (x - 1) + 1] = 440$,

化简可得 $x(84 - 4x) = 440$.

故选D .

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

12. 某药品原价每盒25元，为了响应国家解决老百姓看病贵的号召，经过连续两次降价，现在售价每盒16元，则该药品平均每次降价的百分率是 _____ .

【答案】 20%

【解析】 解：设该药品平均每次降价的百分率为 x ，

由题意可知经过连续两次降价，现在售价每盒16元，

$$\text{故 } 25(1-x)^2 = 16,$$

解得 $x = 0.2$ 或 1.8 （不合题意，舍去），

故该药品平均每次降价的百分率为20%．

故答案为：20%．

【标注】【知识点】一元二次方程的其他实际问题

13. 利客来超市水果专柜张经理以每斤2元的价格购进富士苹果若干斤，然后以每斤4元的价格出售，每天可售出100斤，通过调查发现，这种水果每斤的售价每降低0.2元，每天可多售出40斤．为保证每天至少售出260斤，张阿姨决定降价销售．

（1）若将这种水果每斤的售价降低 x 元，则每天的销售量是_____斤（用含 x 的代数式表示）．

（2）销售这种水果要想每天盈利300元，张阿姨需将每斤的售价降低多少元．

【答案】（1） $100 + 200x$ ．

（2）张阿姨需将每斤的售价降低1元．

【解析】（1）将这种水果每斤的售价降低 x 元，则每天的销售量是

$$100 + \frac{x}{0.2} \times 40 = 100 + 200x \text{（斤）；}$$

故答案为： $100 + 200x$ ．

（2）根据题意得： $(4 - 2 - x)(100 + 200x) = 300$ ，

$$\text{解得：} x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = 1,$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时，销售量是 } 100 + 200 \times \frac{1}{2} = 200 < 260;$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时，销售量是 } 100 + 200 = 300 \text{（斤）．}$$

$\because$ 每天至少售出260斤，

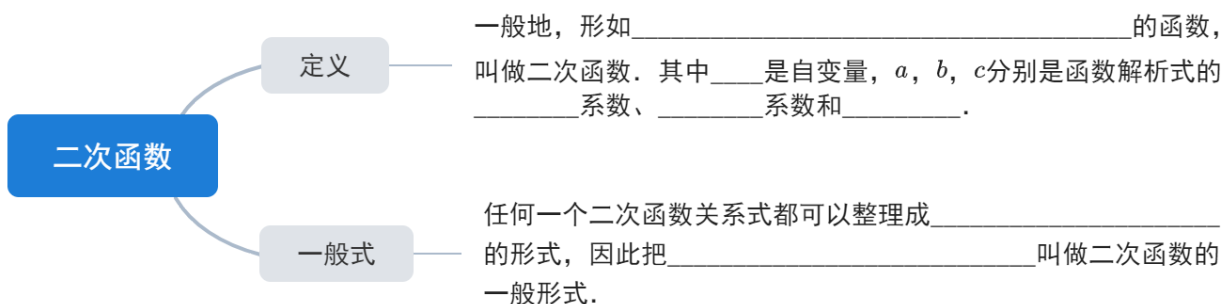
$$\therefore x = 1.$$

答：张阿姨需将每斤的售价降低1元．

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

二、二次函数

1. 二次函数定义与性质



二次函数一般式：

$y = ax^2 + bx + c$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	
函数最值	有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$	有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$
	当定义域为全体实数时, 函数的最小值或最大值是顶点 <u>纵</u> 坐标的值	
增减性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而 <u>减小</u>	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而 <u>增大</u>
	当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而 <u>增大</u>	当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而 <u>减小</u>
开口大小	$ a $ 越大, 开口 <u>越小</u> ; $ a $ 越小, 开口 <u>越大</u> . 在对称轴右侧, 沿着逆时针方向, a 的值逐渐 <u>增大</u> .	

二次函数顶点式：

$y = a(x - h)^2 + k$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = h$	
顶点坐标	(h, k)	
函数最值	有最小值 k	有最大值 k
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点纵坐标的值	
增减性	当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小	当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大
	当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大	当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小

二次函数交点式：

由此可得： $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ 也是表示二次函数的一种解析式，叫作交点式，其中 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根，即二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象与 x 轴公共点的横坐标；对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

2. 二次函数图象变换

二次函数平移口诀：上加下减，左加右减，上下平移在末梢，左右平移在括号

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
上下平移 n 的单位的解析式	$y = ax^2 + bx + c \pm n$	$y = a(x - h)^2 + k \pm n$
左右平移 m 的单位的解析式	$y = a(x \pm m)^2 + b(x \pm m) + c$	$y = a(x - h \pm m)^2 + k$

二次函数关于坐标轴对称口诀：关于谁谁不变，另一个变相反，关于原点都要变

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
关于 x 轴对称	$y = -ax^2 - bx - c$	$y = -a(x - h)^2 - k$
关于 y 轴对称	$y = ax^2 - bx + c$	$y = a(x + h)^2 + k$
关于原点对称	$y = -ax^2 + bx - c$	$y = -a(x + h)^2 - k$

二次函数的特殊对称：

①关于顶点对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于 x 轴对称后，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，顶点 (h, k) 不变，所以新的解析式为 $y = -a(x - h)^2 + k$ 。

②关于某点 (m, n) 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于原点对称后，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 先关于 (m, n) 变成 $(2m - h, 2n - k)$ ，所以新的解析式为 $y = -a(x - 2m + h)^2 + 2n - k$ 。

③关于直线 $y = m$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $y = m$ 对称，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 关于直线 $y = m$ 对称变成 $(h, 2m - k)$ ，所以新的解析式为 $y = -a(x - h)^2 + 2m - k$ 。

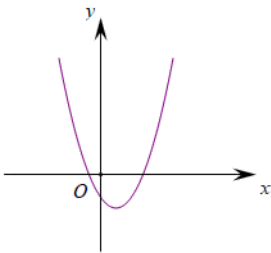
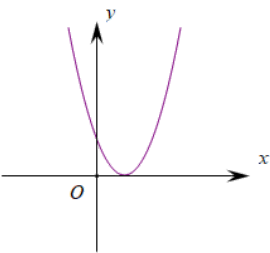
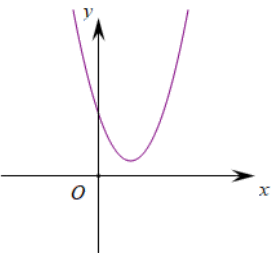
④关于直线 $x = n$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $x = n$ 对称，开口大小 不变，方向 不变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 关于直线 $x = n$ 对称变成 $(2n - h, k)$ ，所以新的解析式为 $y = a(x - 2n + h)^2 + k$ 。

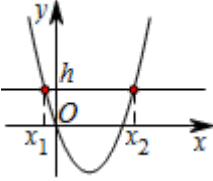
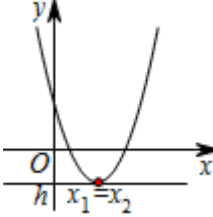
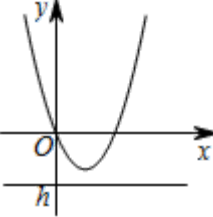
3. 二次函数与方程、不等式综合

①二次函数与 y 轴交点坐标：令 $x = 0$ ，得 $y = b$ ，因此与 y 轴交点坐标为 $(0, b)$

②二次函数与 x 轴交点坐标：令 $y = 0$ ，得 $ax^2 + bx + c = 0$ ，因此方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解可以看做函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的 横坐标，交点的个数决定方程解的个数。

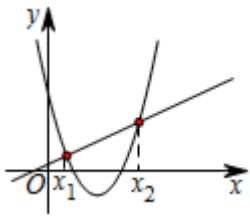
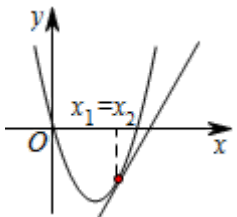
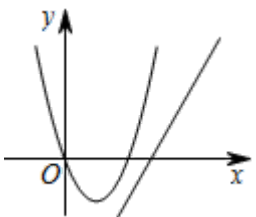
			
与 x 轴交点个数	2	1	没有
判别式	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
根的情况	有两个不等实根	有两个相等实根	没有实数根

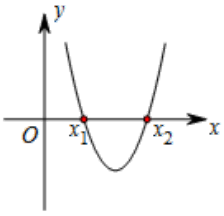
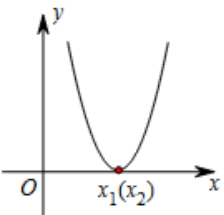
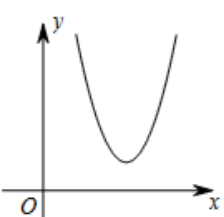
求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点：

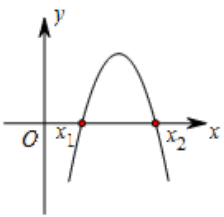
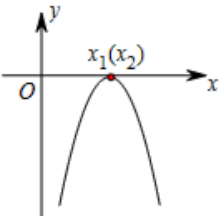
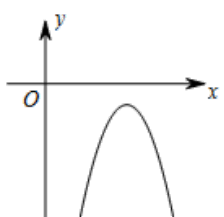
$ax^2 + bx + c - h = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = h$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有 两 个交点	有 两个不相等 的实数根
$\Delta = 0$		有 一 个交点	有 两个相等 的实数根
$\Delta < 0$		无交点	无 实数根

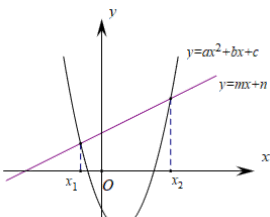
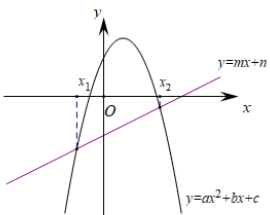
求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点：

联立两个函数解析式，整理可得 $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ ，方程的根即两个函数交点的横坐标；由方程根的情况，确定二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与直线 $y = mx + n$ 位置关系

$ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = mx + n$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有 <u>两</u> 个交点	有 <u>两个不相等</u> 的实数根
$\Delta = 0$		有 <u>一</u> 个交点	有 <u>两个相等</u> 的实数根
$\Delta < 0$		<u>无交点</u>	<u>无</u> 实数根

	图象	与 x 轴的交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$a > 0$		有 <u>两</u> 个交点	<u>$x < x_1$ 或 $x > x_2$</u>	<u>$x_1 < x < x_2$</u>
		有 <u>一</u> 个交点	<u>$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)</u>	<u>无解</u>
		<u>无</u> 交点	<u>全体实数</u>	<u>无解</u>

	图象	与 x 轴交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$a < 0$		有 <u>两</u> 个交点	<u>$x_1 < x < x_2$</u>	<u>$x < x_1$ 或 $x > x_2$</u>
		有 <u>一</u> 个交点	<u>无解</u>	<u>$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)</u>
		<u>无</u> 交点	<u>无解</u>	<u>全体实数</u>

	图象	解集
$a > 0$		$ax^2 + bx + c > mx + n$ 的解集为 <u>$x < x_1$ 或 $x > x_2$</u>
		$ax^2 + bx + c = mx + n$ 的解为 <u>$x = x_1$ 或 $x = x_2$</u>
		$ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 <u>$x_1 < x < x_2$</u>
$a < 0$		$ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 <u>$x < x_1$ 或 $x > x_2$</u>
		$ax^2 + bx + c = mx + n$ 的解为 <u>$x = x_1$ 或 $x = x_2$</u>
		$ax^2 + bx + c > mx + n$ 的解集为 <u>$x_1 < x < x_2$</u>

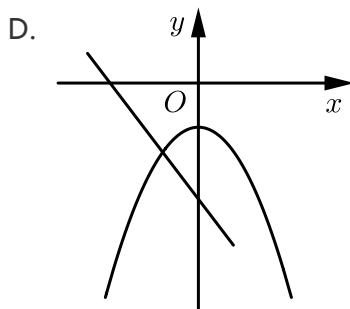
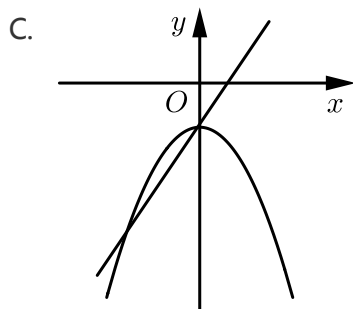
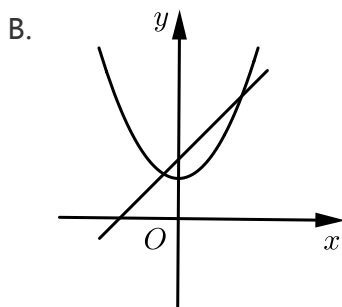
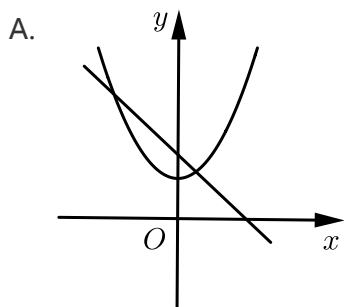
14. 如果函数 $y = (m+1)x^{m^2-m} + 2$ 是二次函数，那么 m 的值为 _____ .

【答案】 2

【解析】 $\because$ 函数 $y = (m+1)x^{m^2-m} + 2$ 是二次函数，
 $\therefore m+1 \neq 0$ 且 $m^2 - m = 2$.
 解得 $m = 2$.

【标注】 【知识点】 利用二次函数的定义求参数的值

15. 函数 $y = ax^2 + c$ 与 $y = -ax + c (a \neq 0)$ 在同一坐标系内的图象是图中的 ().



【答案】 C

【解析】 A 选项：由二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可得： $a > 0, c > 0$ ，由函数 $y = -ax + c$ 的图象可得： $a > 0, c > 0$ ，函数 $y = -ax + c$ 与 $y = ax^2 + c$ 的与坐标轴的交点不是同一点，故 A 错误；

B 选项：由二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可得： $a > 0, c > 0$ ，由函数 $y = -ax + c$ 的图象可得： $a < 0, c > 0$ ，故 B 错误；

C 选项：由二次函数 $y = ax^2 + c$ 图象可得： $a < 0, c < 0$ ，由函数 $y = -ax + c$ 的图象可得： $a < 0, c < 0$ ，函数 $y = -ax + c$ 与 $y = ax^2 + c$ 的与坐标轴的交点是同一点，故 C 正确；

D 选项：由二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可得： $a < 0, c < 0$ ，由函数 $y = -ax + c$ 的图象可得： $a > 0, c < 0$ ，故D错误。

故选 C.

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

16. 二次函数 $y = -2(x + 1)^2 - 4$ 的顶点坐标是().

- A. $(1, 4)$
B. $(-1, 4)$
C. $(-1, -4)$
D. $(1, -4)$

【答案】 C

【解析】 二次函数 $y = -2(x+1)^2 - 4$ 的顶点坐标是 $(-1, -4)$.

故选C.

【标注】 **【知识点】** 二次函数顶点式

17. 已知二次函数 $y = -x^2 + 2x - 3$, 用配方法化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式为 _____.

【答案】 $y = -(x - 1)^2 - 2$

【解析】 $\because y = -x^2 + 2x - 3$
 $= -(x^2 - 2x) - 3$
 $= -(x - 1)^2 - 2.$

【标注】 【知识点】 二次函数解析式间转化

18. 若抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点, 且过点 $A(m, n)$, $B(m-4, n)$, 则 n 的值为 () .

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 8

【答案】 C

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 过点 $A(m, n)$, $B(m-4, n)$,
 $\therefore$ 对称轴是 $x = \frac{m + m - 4}{2} = m - 2$,
 又 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点,
 $\therefore$ 顶点为 $(m-2, 0)$,

设抛物线 $y = (x - m + 2)^2$,

把 $A(m, n)$ 代入 $y = (x - m + 2)^2$ 中得 $n = 4$.

故选C.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2$ 的图象和性质

19. 若点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 在抛物线 $y = a(x + 1)^2 + 2(a < 0)$ 上, 则下列结论正确的是().

A. $2 > y_1 > y_2$

B. $2 > y_2 > y_1$

C. $y_1 > y_2 > 2$

D. $y_2 > y_1 > 2$

【答案】 A

【解析】 $\because y = a(x + 1)^2 + 2(a < 0)$, 当 $x > -1$ 时, y 值随 x 增大而减小, 当 $x = -1$ 时, 有最大值为2.

又 $\because$ 点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 都在抛物线 $y = a(x + 1)^2 + 2(a < 0)$ 的图象上,

$1 < 2$,

$\therefore 2 > y_1 > y_2$.

故选A.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象和性质

20. 下列关于二次函数 $y = -(x - m)^2 + m^2 + 1(m$ 为常数)的结论: ①该函数的图象与函数 $y = -x^2$ 的图象形状相同; ②该函数的图象一定经过点 $(0, 1)$; ③当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; ④该函数的图象的顶点在函数 $y = x^2 + 1$ 的图象上, 其中所有正确结论的序号是 ____.

【答案】 ①②④

【解析】 解: ① $\because$ 二次函数 $y = -(x - m)^2 + m^2 + 1(m$ 为常数)与函数 $y = -x^2$ 的二次项系数相同,

$\therefore$ 该函数的图象与函数 $y = -x^2$ 的图象形状相同, 故结论①正确;

② $\because$ 在函数 $y = -(x - m)^2 + m^2 + 1$ 中, 令 $x = 0$, 则 $y = -m^2 + m^2 + 1 = 1$,

$\therefore$ 该函数的图象一定经过点 $(0, 1)$, 故结论②正确;

③ $\because y = -(x - m)^2 + m^2 + 1$,

$\therefore$ 抛物线开口向下, 对称轴为直线 $x = m$, 当 $x > m$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故结论③错误;

④ $\because$ 抛物线开口向下, 当 $x = m$ 时, 函数 y 有最大值 $m^2 + 1$,

∴该函数的图象的顶点在函数 $y = x^2 + 1$ 的图象上，故结论④正确．

故答案为①②④．

【标注】【知识点】二次函数的定义；二次函数顶点式

21. 求经过 $A(4, 0)$ ， $B(-2, 0)$ ， $C(0, 3)$ 三点的抛物线解析式．

【答案】 $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$ ．

【解析】 根据题意设抛物线解析式为 $y = a(x + 2)(x - 4)$ ，

把 $C(0, 3)$ 代入得： $-8a = 3$ ，即 $a = -\frac{3}{8}$ ，

则抛物线解析式为 $y = -\frac{3}{8}(x + 2)(x - 4) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$ ，

故所求解析式为 $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$ ．

【标注】【知识点】二次函数双根式（交点式）

22. 已知抛物线 l_1 的最高点为 $P(3, 4)$ ，且经过点 $A(0, 1)$ ，求 l_1 的解析式．

【答案】 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$ ．

【解析】 设解析式为 $y = a(x - 3)^2 + 4$ ，则 $9a + 4 = 1$ ， $a = -\frac{1}{3}$ ，

$y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 4$ ，即 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$ ．

故答案为： $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$ ．

【标注】【知识点】二次函数一般式

23. 若二次函数的图象过 $(-3, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, -3)$ 三点，求这个二次函数的解析式．

【答案】 见解析

【解析】 解：设二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，

将 $(-3, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, -3)$ 三点代入解析式得：

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

则二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

24. 二次函数 $y = x^2 - 2ax + 3$ (a 为常数) 在自变量 x 的值满足 $2 \leq x \leq 3$ 时, 其对应的函数值 y 有最小值 $2a$, 则 a 的值为().

A. -3

B. 1

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】 $\because y = x^2 - 2ax + 3 = (x - a)^2 + 3 - a^2$,

$\therefore$ 当 $x > a$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x < a$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ ①若 $a < 2 \leq x \leq 3$, $x = 2$ 时, y 取得最小值 $2a$,

可得: $(2 - a)^2 + 3 - a^2 = 2a$,

解得: $a = \frac{7}{6}$;

②若 $2 \leq x \leq 3 < a$, 当 $x = 3$ 时, y 取最小值 $2a$,

可得: $(3 - a)^2 + 3 - a^2 = 2a$,

解得: $a = \frac{3}{2} < 3$ (不合题意);

③若 $2 < a < 3$ 时, 当 $x = a$ 时, y 取得最小值为 $3 - a^2$,

即 $3 - a^2 = 2a$,

解得 $a = -3 < 2$ 或 $a = 1 < 2$ (不合题意).

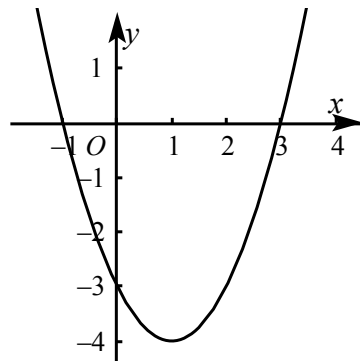
综上, a 的值为 $\frac{7}{6}$,

故选C.

【标注】【知识点】定区间动轴函数的最值问题

栗子

25. 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象如图所示, 当 $y < 0$ 时, 自变量 x 的取值范围是().



A. $-1 < x < 3$

B. $x < -1$

C. $x > 3$

D. $x < -1$ 或 $x > 3$

【答案】 A

【解析】由二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象可知，

图象与 x 轴的交点坐标是 $(-1, 0)$, $(3, 0)$,

∴当 $y < 0$ 时，即图象在 x 轴下方的部分，此时 x 的取值范围是： $-1 < x < 3$ ，

故答案为： $-1 < x < 3$.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

26. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 中的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表：

x	$\dots$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\dots$
y									$\dots -\frac{5}{4} -2 -\frac{9}{4} -2 -\frac{5}{4} 0 \frac{7}{4} \dots$

则 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解为 _____ .

【答案】 -2或1

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 过点 $(-1, -2)(0, -2)$,

∴此抛物线的对称轴为：直线 $x = -\frac{1}{2}$ ，

∴此抛物线过点(1, 0),

∴此抛物线与 x 轴的另一个交点为： $(-2, 0)$ ，

$$\therefore ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的解为: } x = -2 \text{ 或 } 1.$$

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

27. 已知关于 x 的函数 $y = (m-1)x^2 + 2x + \frac{1}{2}m$ 的图象与坐标轴有且只有2个交点, 则 $m =$ _____.

【答案】 $0, \pm 1, 2$

【解析】①若 $m-1=0$ ，则一次函数 $y=2x+\frac{1}{2}$ 与坐标轴只有2个交点，

$$\therefore m = 1.$$

②若 $m-1 \neq 0$,

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = 4 - 2m(m-1) = 0 \\ \frac{1}{2}m \neq 0 \end{cases},$$

解得 $m = -1$ 或 $m = 2$,

$\therefore m = -1$ 或 2 .

③若 $m - 1 \neq 0$, $\frac{1}{2}m = 0$,

即 $m = 0$ 时, $y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$,

交 x 轴于 $(0, 0)$, $(2, 0)$,

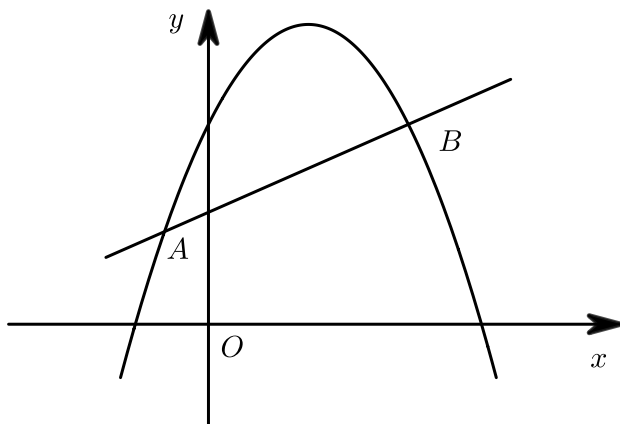
与坐标轴只有 2 个交点,

$\therefore m = 0$.

综上, m 的值为: $0, \pm 1, 2$.

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

28. 如图, 直线 $y = mx + n$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 $A(-1, p)$, $B(4, q)$ 两点, 则关于 x 的不等式 $mx + n > ax^2 + bx + c$ 的解集是 ().



A. $x < -1$

B. $x > 4$

C. $x < -1$ 或 $x > 4$

D. $-1 < x < 4$

【答案】 C

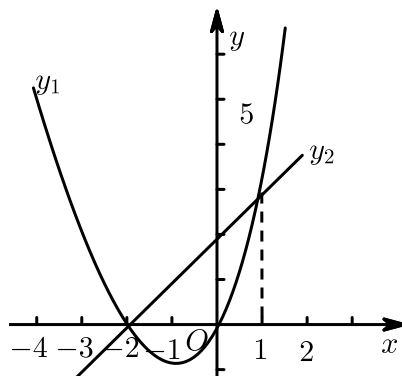
【解析】 由图象可知, 关于 x 的不等式 $mx + n > ax^2 + bx + c$ 表示直线 $y = mx + n$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上方时 x 的取值,

$\therefore x < -1$ 或 $x > 4$.

故选 C.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

29. 如图是二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 和一次函数 $y_2 = mx + n$ 的图象，观察图象写出 $y_2 \geq y_1$ 时， x 的取值范围 _____ .

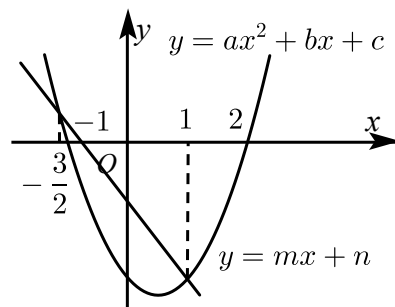


【答案】 $-2 \leq x \leq 1$

【解析】 观察图象可知，当 $-2 \leq x \leq 1$ 时， $y_2 \geq y_1$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

30. 已知直线 $y = mx + n$ 和抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐标系中的位置如图所示，且抛物线与 x 轴交于点 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，抛物线与直线交点的横坐标为 1 和 $-\frac{3}{2}$ ，那么不等式 $mx + n < ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 () .



A. $1 < x < 2$

B. $x < -\frac{3}{2}$ 或 $x > 1$

C. $-\frac{3}{2} < x < 2$

D. $-1 < x < 2$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 由函数图象可知：当 $-1 < x < 2$ 时， $ax^2 + bx + c < 0$ ，

当 $x > 1$ 时， $mx + n < ax^2 + bx + c$ ，

$\therefore$ 不等式 $mx + n < ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $1 < x < 2$.

故选：A .

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

31. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 $(-3, 0)$ 与 $(1, 0)$ 两点, 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + m = 0 (m > 0)$ 有两个根, 其中一个根是3. 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + n = 0 (0 < n < m)$ 有两个整数根, 这两个整数根是 ().
- A. -2或0 B. -4或2 C. -5或3 D. -6或4

【答案】 B

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点坐标为 $(-3, 0)$, $(1, 0)$,
 $\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x = \frac{-3+1}{2} = -1$,
 $\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + m = 0$, 其中一根为3,
 $\therefore$ 根据对称性可知方程的另一根为-5,
 $\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + n = 0 (0 < n < m)$ 有两个整数根, 分别为 x_1 、 $x_2 (x_1 < x_2)$,
 $\therefore x_1 = -4, x_2 = 2$,
 故这两个整数根为-4或2.
 故选B.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

栗子

32. 在抛物线 $y = -3x^2$ 向右平移2个单位再向上平移5个单位得到抛物线解析式为 ().
- A. $y = -3(x-2)^2 - 5$ B. $y = -3(x+2)^2 - 5$
 C. $y = -3(x+2)^2 + 5$ D. $y = -3(x-2)^2 + 5$

【答案】 D

【解析】 根据平移规律“左加右减, 上加下减”可知抛物线 $y = -3x^2$ 向右平移2个单位再向上平移5个单位得到抛物线为 $y = -3(x-2)^2 + 5$,
 故答案为D.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

33. 把抛物线 $y = x^2 - 2x + 4$ 向左平移2个单位, 再向下平移6个单位, 所得抛物线的顶点坐标是 ().
- A. $(3, -3)$ B. $(3, 9)$ C. $(-1, -3)$ D. $(-1, 9)$

【答案】C

【解析】 $y = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3$,

将 $y = (x - 1)^2 + 3$ 向左平移2个单位,再向下平移6个单位可得 $y = (x + 1)^2 - 3$,

$\therefore$ 顶点为 $(-1, -3)$.

故选C.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

34. 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 - 1$ 关于 x 轴对称的抛物线解析式为 _____.

【答案】 $y = -2(x - 3)^2 + 1$

【解析】 $y = 2(x - 3)^2 - 1$ 的顶点坐标为 $(3, -1)$,

点 $(3, -1)$ 关于 x 轴对称的点坐标 $(3, 1)$,

$\therefore$ 所求抛物线解析式为: $y = -2(x - 3)^2 + 1$.

【标注】【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

35. 已知抛物线 $y_1 = a(x - m)^2 + k$ 与 $y_2 = a(x + m)^2 + k$ ($m \neq 0$)关于 y 轴对称,我们称 y_1 与 y_2 互为“和谐抛物线”.请写出抛物线 $y = -4x^2 + 6x + 7$ 的“和谐抛物线”_____.

【答案】 $y = -4x^2 - 6x + 7$

【解析】解:抛物线 $y = -4x^2 + 6x + 7$ 的“和谐抛物线”是 $y = -4(-x)^2 + 6(-x) + 7$,

化简,得 $y = -4x^2 - 6x + 7$,

故答案为: $y = -4x^2 - 6x + 7$.

【标注】【知识点】二次函数图象部分对称

36. 将抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 绕其顶点旋转 180° 后,所得到的新的抛物线的解析式为 _____.

【答案】 $y = -x^2 - 2x - 3$

【解析】 $y = x^2 + 2x - 1$,

$= (x^2 + 2x) - 1$

$= (x^2 + 2x + 1 - 1) - 1$

$$= (x^2 + 2x + 1) - 1 - 1$$

$$= (x + 1)^2 - 2,$$

将原抛物线绕顶点旋转 180° 后，

$$\text{得 } y = -(x + 1)^2 - 2,$$

$$\text{即：} y = -x^2 - 2x - 3.$$

【标注】【知识点】二次函数图象关于任意点对称

37. 在平面直角坐标系中，将抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 绕着它与 y 轴的交点旋转 180° ，所得抛物线的解析式是（ ）.

A. $y = -(x + 1)^2 + 2$

B. $y = -(x - 1)^2 + 4$

C. $y = -(x - 1)^2 + 2$

D. $y = -(x + 1)^2 + 4$

【答案】 B

【解析】 由原抛物线解析式可变为： $y = (x + 1)^2 + 2$ ，

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-1, 2)$ ，与 y 轴交点的坐标为 $(0, 3)$ ，

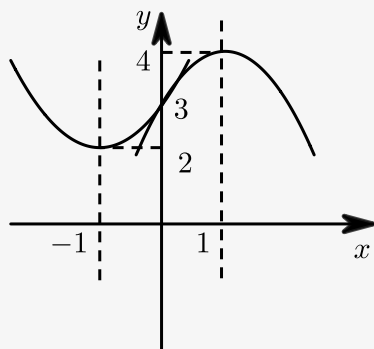
又由抛物线绕着它与 y 轴的交点旋转 180° ，

$\therefore$ 新的抛物线的顶点坐标与原抛物线的顶点坐标关于点 $(0, 3)$ 中心对称，

$\therefore$ 新的抛物线的顶点坐标为 $(1, 4)$ ，

$\therefore$ 新的抛物线解析式为： $y = -(x - 1)^2 + 4$.

故选B .

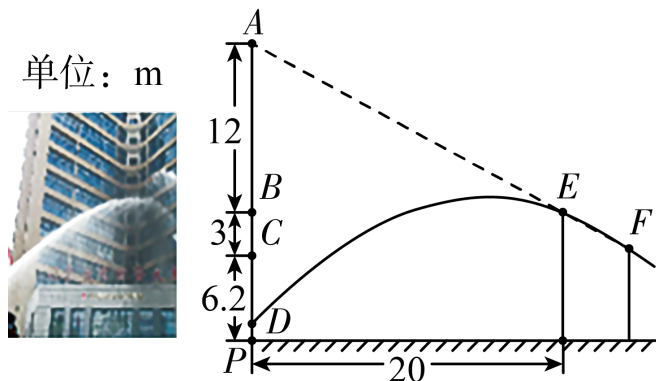


【标注】【知识点】二次函数图象关于任意点对称

栗子

38. 两幢大楼的部分截面及相关数据如图，小明在甲楼 A 处透过窗户 E 发现乙楼 F 处出现火灾，此时 A ， E ， F 在同一直线上．跑到一楼时，消防员正在进行喷水灭火，水流路线呈抛物线，在 1.2m 高的 D

处喷出，水流正好经过点 E ， F ．若点 B 和点 E 、点 C 和点 F 的离地高度分别相同，消防员将水流抛物线向上平移 0.4m ，再向左后退了 ____ m ，恰好把水喷到 F 处进行灭火．



【答案】 $\sqrt{110} - 10$

【解析】 解：由图形可知，点 $A(0, 21.2)$ 、 $D(0, 1.2)$ 、 $E(20, 9.2)$ 、点 F 的纵坐标为 6.2 ，

设 AE 所在直线的解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\text{则} \begin{cases} n = 21.2 \\ 20m + n = 9.2 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} m = -0.6 \\ n = 21.2 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AE 解析式为 $y = -0.6x + 21.2$ ，

当 $y = 6.2$ 时， $-0.6x + 21.2 = 6.2$ ，

解得： $x = 25$ ，

$\therefore$ 点 F 坐标为 $(25, 6.2)$ ，

设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，

将点 $D(0, 1.2)$ 、 $E(20, 9.2)$ 、 $F(25, 6.2)$ 代入，得：

$$\begin{cases} c = 1.2 \\ 400a + 20b + c = 9.2 \\ 625a + 25b + c = 6.2 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -\frac{1}{25} \\ b = \frac{6}{5} \\ c = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{6}{5} = -\frac{1}{25}(x - 15)^2 + \frac{51}{5}$ ，

设消防员向左移动的距离为 $p(p > 0)$ ，

则移动后抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{25}(x + p - 15)^2 + \frac{51}{5} + \frac{2}{5}$ ，

根据题意知，平移后抛物线过点 $F(25, 6.2)$ ，代入得：

$$-\frac{1}{25}(25 + p - 15)^2 + \frac{51}{5} + \frac{2}{5} = 6.2$$

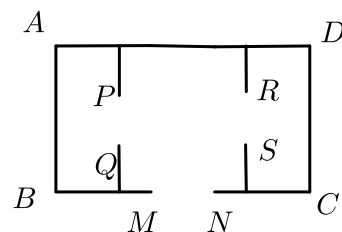
解得： $p = -\sqrt{110} - 10$ (舍)或 $p = \sqrt{110} - 10$ ．

即消防员将水流抛物线向上平移 0.4m ，再向左后退了 $(\sqrt{110} - 10)\text{m}$ ，恰好把水喷到 F 处进行灭火．

故答案为： $\sqrt{110} - 10$ ．

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

39. 一养鸡专业户计划用 116m 长的篱笆围成如图所示的三间长方形鸡舍，门 MN 宽 2m ，门 PQ 和 RS 的宽都是 1m ，围成的鸡舍面积最大是 _____ 平方米．



【答案】450

【解析】设鸡舍面积为 y 平方米， $AB = x\text{m}$ ，

$$\text{则 } AD = \frac{116 - 4x + 2}{2} + 1 = (60 - 2x)\text{m}，$$

$$\text{由题意得：} y = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x，$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{b}{2a} = 15 \text{ 时，围成的鸡舍面积最大，}$$

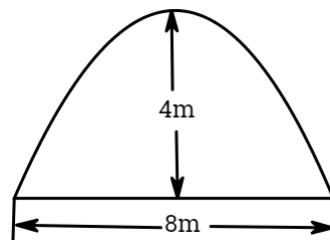
$$\text{最大值为：} -2 \times 15^2 + 60 \times 15 = 450 \text{（平方米）．}$$

故答案为：450．

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

40. 解答：

- (1) 一辆宽 2m 的货车要通过跨度为 8m ，拱高为 4m 的单行抛物线隧道（从正中通过），为保证安全，车顶左右两侧离隧道的垂直距离至少要 0.5m ，求货车的限高为多少？

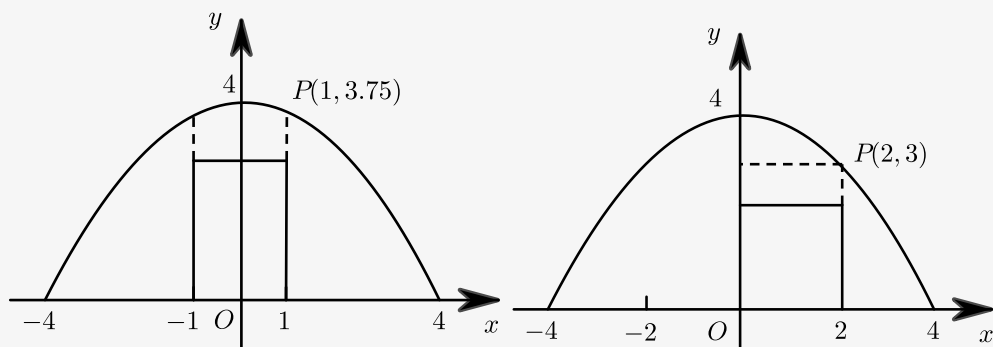


- (2) 若将(1)中的单行道改为双行道，即货车必须从隧道中线的右侧通过，求货车的限高应是多少？

【答案】(1) 3.25米.

(2) 2.5米.

【解析】(1) 建立如图所示坐标系,



$\therefore$ 抛物线的顶点坐标是 $(0, 4)$,

$\therefore$ 可设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4$.

又 $\because$ 抛物线过 $(4, 0)$ 点, $\therefore 0 = a \times 4^2 + 4$,

$$\therefore a = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad (-4 \leq x \leq 4)$$

当 $x = 1$ 时, $y = 3.75$.

$\therefore$ 货车限高为 $3.75 - 0.5 = 3.25$ (米).

(2) 当 $x = 2$ 时, $y = 3$,

故货车限高为 $3 - 0.5 = 2.5$ (米).

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

41. 超市销售某种儿童玩具, 如果每件利润为40元(市场管理部门规定, 该种玩具每件利润不能超过60元), 每天可售出50件. 根据市场调查发现, 销售单价每增加2元, 每天销售量会减少1件. 设销售单价增加 x 元, 每天售出 y 件.

(1) 请写出 y 与 x 之间的函数表达式.

(2) 当 x 为多少时, 超市每天销售这种玩具可获利润2250元?

(3) 设超市每天销售这种玩具可获利 w 元, 当 x 为多少时 w 最大, 最大值是多少?

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x + 50$.

(2) 当 x 为10时, 超市每天销售这种玩具可获利润2250元.

(3) 当 x 为20时 w 最大, 最大值是2400元.

【解析】(1) 根据题意得: $y = -\frac{1}{2}x + 50$.

(2) 根据题意得： $(40 + x)\left(-\frac{1}{2}x + 50\right) = 2250$ ，

解得 $x_1 = 50$ ， $x_2 = 10$ ，

∵每件利润不能超过60元，

∴ $x = 10$ 。

答：当 x 为10时，超市每天销售这种玩具可获利润2250元。

(3) 根据题意得，

$$w = (40 + x)\left(-\frac{1}{2}x + 50\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 30x + 2000$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 30)^2 + 2450，$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} < 0，$$

∴当 $x < 30$ 时， w 随 x 的增大而增大，

∵每件利润不能超过60元，

$$\therefore x \leq 20，$$

$$\therefore \text{当 } x = 20 \text{ 时， } w_{\text{最大}} = 2400，$$

答：当 x 为20时 w 最大，最大值是2400元。

【标注】【知识点】二次函数的利润问题