



试卷整体分析

# 2024 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)抢分卷

## 数学(2-押题卷)

本试卷分为第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 2 页,第 II 卷 3 至 4 页。

答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时,考生务必将答案涂写在答题卡上,答在试卷上的无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利!

### 第 I 卷

#### 注意事项:

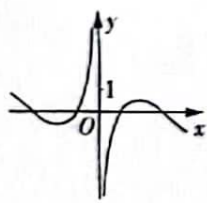
1. 每小题选出答案后,用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
2. 本卷共 9 小题,每小题 5 分,共 45 分。

#### 参考公式:

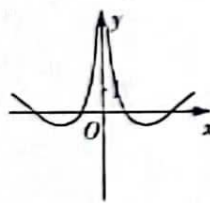
- 如果事件  $A$  与事件  $B$  互斥,那么  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- 如果事件  $A$  与事件  $B$  相互独立,那么  $P(AB) = P(A)P(B)$ .
- 棱锥的体积公式  $V = \frac{1}{3}Sh$ ,其中  $S$  表示棱锥的底面面积, $h$  表示棱锥的高.
- 球的体积公式  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ,其中  $R$  表示球的半径.

一. 选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

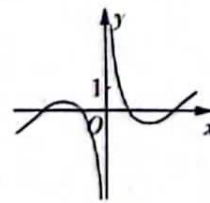
1. 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , 则  $A \cap (\complement_U B) =$  ( )  
 (A)  $\{1, 3\}$  (B)  $\{2, 4\}$   
 (C)  $\{5\}$  (D)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
2. 设  $x \in \mathbb{R}$ , 则“ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”的 ( )  
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 函数  $y = \sin x - \frac{1}{x}$  的大致图象是 ( )



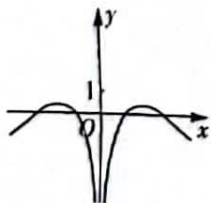
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 已知  $a = e^{-\frac{1}{2}}$ ,  $b = \log_3 2$ ,  $c = \ln 3$ , 则 ( )  
 (A)  $a > b > c$  (B)  $c > a > b$  (C)  $a > c > b$  (D)  $c > b > a$
5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左顶点与抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点的距离为 4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为  $(-3, -1)$ , 则双曲线的焦距为 ( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{10}}{3}$  (B)  $\frac{2\sqrt{10}}{3}$  (C)  $4\sqrt{3}$  (D)  $4\sqrt{5}$
6. 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的外接球体积为  $\sqrt{6}\pi$ , 则三棱锥  $A-B_1CD$  的体积为 ( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (B)  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{12}$  (D)  $\sqrt{2}$
7. 为了有针对性地提高学生体育锻炼的积极性, 某中学需要了解性别因素是否对本校学生体育锻炼的经常性有影响, 为此对学生是否经常锻炼的情况进行了普查. 全校学生的普查数据如下表:

单位: 人

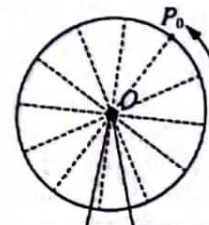
| 性别 | 锻炼  |     | 合计   |
|----|-----|-----|------|
|    | 不经常 | 经常  |      |
| 女生 | 192 | 331 | 523  |
| 男生 | 128 | 473 | 601  |
| 合计 | 320 | 804 | 1124 |

应用  $\chi^2$  独立性检验, 计算得  $\chi^2 \approx 32.6239$ . 下表是  $\chi^2$  独立性检验中常用的小概率值和对应的临界值.

| $\alpha$          | 0.1   | 0.05  | 0.01  | 0.005 | 0.001  |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\chi_{\alpha}^2$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

- 根据以上数据, 下列推断正确的是 ( )
- (A) 性别因素对本校学生体育锻炼的经常性没有影响, 犯错误的概率不超过 0.05
  - (B) 性别因素对本校学生体育锻炼的经常性有影响, 犯错误的概率不超过 0.05
  - (C) 性别因素对本校学生体育锻炼的经常性没有影响, 犯错误的概率不超过 0.95
  - (D) 根据以上数据, 无法判断性别因素对本校学生体育锻炼的经常性是否有影响
8. 已知  $m, n$  为异面直线,  $m \perp$  平面  $\alpha$ ,  $n \perp$  平面  $\beta$ . 若直线  $l$  满足  $l \perp m, l \parallel n, l \subset \alpha, l \subset \beta$ , 则 ( )  
 (A)  $\alpha \parallel \beta, l \parallel \alpha$  (B)  $\alpha \parallel \beta, l \perp \alpha$   
 (C)  $\alpha \perp \beta, l \perp \beta$  (D)  $\alpha \perp \beta, l \perp \alpha$

9. 今年春节期间, 长虹公园建成一座摩天轮, 又为我市居民提供了一个休闲娱乐的设施. 已知该摩天轮半径  $r$  为 25 米, 从正面看去, 逆时针旋转, 每分钟旋转  $\frac{\pi}{12}$  弧度, 摩天轮中心  $O$  到地面的距离为 30 米. 如图, 若某轿厢  $M$  在  $P_0$  处距地面 50 米, 则 9 分钟后轿厢  $M$  距地面的距离为 ( )



- (A)  $30 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$  (B)  $30 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$  (C)  $30 + \frac{35\sqrt{2}}{2}$  (D)  $30 - \frac{35\sqrt{2}}{2}$

数学(2-押题卷)

第 II 卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共 11 小题,共 105 分。

二. 填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分. 试题中包含两个空的,答对 1 个的给 3 分,全部答对的给 5 分.

10.  $i$  是虚数单位,复数  $\frac{8+2i}{1+i}$  = \_\_\_\_\_.

11. 在  $(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2})^5$  的展开式中,常数项是 \_\_\_\_\_.

12. 已知圆  $C$  与直线  $2x+y-8=0$  相切于点  $A(3,2)$ ,直线  $x-y+2=0$  与圆相交的两个交点的中点为  $B(0,2)$ ,则圆的半径为 \_\_\_\_\_.

13. 现投掷两个均匀的骰子,则两个骰子点数不同的概率为 \_\_\_\_\_;在两个骰子点数不同的条件下,其中一个骰子的点数为 6 的概率为 \_\_\_\_\_.

14. 已知正三角形  $ABC$  的边长为 1,点  $P$  在其内切圆上,则  $|\overrightarrow{AP}|$  的最小值为 \_\_\_\_\_;若  $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ ,则  $\lambda+\mu$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

15. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ ,对于任意的  $x\in(-\infty,0]$ ,总有

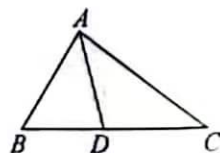
$f'(x)<\frac{1}{2}$ ,且  $f(x)-f(-x)=x$ ,则不等式  $f(2x+1)-f(x-2)<\frac{x+3}{2}$  的解集为 \_\_\_\_\_.

三. 解答题:本大题共 5 小题,共 75 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 14 分)

如图,在  $\triangle ABC$  中,点  $D$  在边  $BC$  上, $AB=\sqrt{3}+1$ , $AD=\sqrt{6}$ , $AC=\frac{5\sqrt{3}+15}{6}$ , $\angle BAD=45^\circ$ .

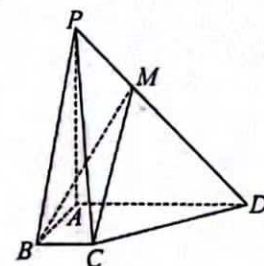
- (I) 求  $BD$  的长;
- (II) 求  $\sin C$  的值;
- (III) 求  $\cos(2C+\frac{\pi}{3})$  的值.



17. (本小题满分 15 分)

如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,底面  $ABCD$  为直角梯形, $AD\perp AB$ , $PA\perp$  平面  $ABCD$ , $AD=3$ , $AB=2$ , $BC=1$ , $PA=3$ ,点  $M$  在  $PD$  上,且  $DM=2MP$ .

- (I) 证明: $CM\parallel$  平面  $PAB$ ;
- (II) 求平面  $BCM$  和平面  $CPM$  夹角的余弦值;
- (III) 求点  $A$  到平面  $CPM$  的距离.



18. (本小题满分 15 分)

已知椭圆  $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$  的左、右顶点分别为  $A_1,A_2$ ,左、右焦点分别为  $F_1,F_2$ ,点  $B$  为椭圆短轴的一个端点,且  $\frac{|A_1F_2|}{|F_2A_2|}=3$ ,三角形  $A_1F_2B$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

- (I) 求椭圆  $C$  的标准方程;
- (II) 点  $P$  为椭圆上一动点(异于点  $A_1,A_2$ ),过点  $N(n,0)$  且与  $x$  轴垂直的直线与直线  $A_1P$  交于点  $Q$ ,点  $M$  为  $NQ$  的中点,且  $OM\parallel A_1P$ .

(I) 求  $n$  的值;

(II) 求证:以  $NQ$  为直径的圆和直线  $PF_2$  相切.



视频讲解

19. (本小题满分 15 分)

已知数列  $\{a_n\}$  是一个首项  $a_1>0$  的等差数列, $\{A_n^{(k)}\}$  是以  $a_k$  为首项, $q$  为公比的等比数列,实数  $q\neq 0$ . 已知  $A_1^{(3)}=5$ , $A_2^{(2)}=9$ , $(A_4^{(2)})^2=A_7^{(5)}$ .

- (I) 求  $q$  的值;
- (II) 对于给定的正整数  $k$ ,证明:数列  $\{A_k^{(n)}\}$  是等差数列,并求其前  $n$  项和;
- (III) 求  $\sum_{k=1}^n A_k^{(k)}$ .

20. (本小题满分 16 分)

设函数  $f(x)=a^x-ax-1$ , $x\in\mathbb{R}$ ,其中  $a>0$ ,且  $a\neq 1$ .

- (I) 当  $a=e$  时,求  $f(x)$  的单调区间;
- (II) 对于给定的  $a>1$ ,若对于任意的  $x\in[0,1]$ ,总有  $f(x+s)\leq -as$ ,求实数  $s$  的最大值;
- (III) 证明: $1^{\frac{1}{n-1}}+(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n-1}}+(\frac{1}{3})^{\frac{1}{n-1}}+\dots+(\frac{1}{n-1})^{\frac{1}{n-1}}>\frac{n-1}{2}(n\in\mathbb{N}^*,n\geq 2)$ .