

解三角形与三角函数

一、解答题

1. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 其中 $\omega > 0$.

(1) 求 ω 的值及函数 $y = f(x) - 1$ 的零点;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 点 D 为 AB 的中点. 若 B 为锐角, 且 $f(B) = 0$, $CD = \sqrt{3}$, $c = 4$, 求 b .

【答案】(1) $2, -\frac{\pi}{12} + k\pi$ 或 $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

(2) $b = \sqrt{13}$

【分析】(1) 先应用对称性得出周期进而得出 $\omega = 2$, 再应用正弦函数性质计算求解零点;

(2) 先根据 $f(B) = 0$ 得出 $B = \frac{\pi}{3}$, 再应用余弦定理计算求解边长.

【详解】(1) 由 $f(x)$ 的相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 可得 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 即最小正周期 $T = \pi$,

又 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, 且 $\omega > 0$, 故 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$,

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

令 $y = f(x) - 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$,

得到 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

解得 $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ 或 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

所以函数 $y = f(x) - 1$ 的零点为 $-\frac{\pi}{12} + k\pi$ 或 $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(2) 因为 $f(B) = 2\sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, B 为锐角, 所以 $2B + \frac{\pi}{3} = \pi$, 解得 $B = \frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle BCD$ 中由余弦定理得 $CD^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + a^2 - 2 \times \frac{1}{2}c \cdot a \cdot \cos B = 4 + a^2 - 2a$,

因为 $CD = \sqrt{3}$, 所以 $4 + a^2 - 2a = 3$, 解得 $a = 1$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 1 + 16 - 4 = 13$, 所以 $b = \sqrt{13}$.

2. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \theta)$ ($\omega > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2}$) 的图象与函数 $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \tan 2x$ 的图象的一个交点为 $\left(\frac{\pi}{6}, y_0\right)$, 且函数 $f(x)$ 的最小正周期是函数 $g(x)$ 最小正周期的 2 倍.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = 2, b = 2, c = 4$, AM 是 BC 边上的中线, 求中线 AM 的长度.

【答案】(1)

$$f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

(2)

$\sqrt{7}$

【分析】(1) 先根据正切函数的周期及两函数周期的关系求出 $f(x)$ 的 ω ，再代入交点坐标求得 θ 得到 $f(x)$ 的解析式；

(2) 先由 $f(A)=2$ 求出角 A ，再利用向量模长公式计算中线 AM 的长度。

【详解】(1) 解：由题意知，正切型函数 $g(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\tan 2x$ 的最小正周期 $T_g=\frac{\pi}{2}$ ，

因为函数 $f(x)$ 的最小正周期是函数 $g(x)$ 最小正周期的 2 倍。

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T_f=2T_g=\pi$ ，即 $T_f=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$ ，解得 $\omega=2$ ，

因为函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\theta)\left(\omega>0,|\theta|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象与函数 $g(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\tan 2x$ 的图象的一个交点为 $\left(\frac{\pi}{6}, y_0\right)$ ，

所以，将交点横坐标 $\frac{\pi}{6}$ 代入 $g(x)$ 得 $y_0=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=1$ ，即 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$ ，

代入 $f(x)$ 得 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=1$ ，即 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\frac{1}{2}$ ，

因为 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ ， $\frac{\pi}{3}+\theta\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ ，所以 $\frac{\pi}{3}+\theta=\frac{\pi}{6}$ ，解得 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ ，

因此 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 。

(2) 解：因为 $f(A)=2$ ， $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ ，所以 $2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=2$ ，即

$\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=1$ ，

因为 A 为三角形内角，即 $A\in(0,\pi)$ ， $2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$ ，

所以 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ ，解得 $A=\frac{\pi}{3}$ ，

因为 AM 是 BC 边上的中线， $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ ，

所以 $|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$ ，

代入 $|\overrightarrow{AB}|=c=4$ ， $|\overrightarrow{AC}|=b=2$ ， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}=4$ ，得： $|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{1}{4}(16+4+8)=7$ ，

所以 $AM=\sqrt{7}$ 。

3. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$ ， $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)，其图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，且相邻两

条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式;

(2)求 $f(x)$ 的单调递增区间和对称中心;

(3)将 $f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象,设 $f(x)$, $g(x)$ 图象相邻的三个交点为 A, B, C , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(参考数据: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$).

【答案】(1) $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

(2) 单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$; 对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$

(3) $\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\pi}{2}$

【分析】(1) 由题可知 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 再由 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 求出 ω , 结合对称轴求出 φ , 进而得到解析式;

(2) 利用整体法求单调区间及对称中心即可;

(3) 设 A, B, C 的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 , 根据平移得到 $g(x)$, 再解出 $f(x) - g(x) = 0$, 再取相邻的三个解, 然后求面积即可.

【详解】(1) 由题可知 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 则 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$,

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$, 又函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称,

所以 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$,

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

$$(2) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

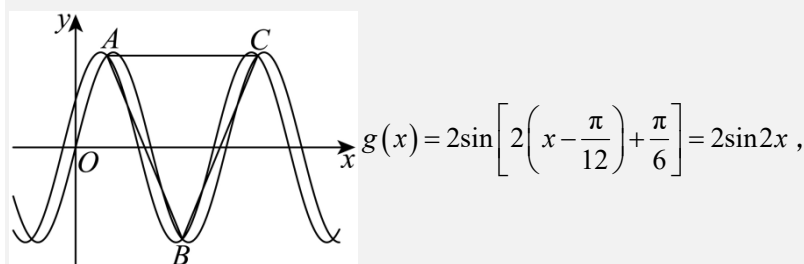
解得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$,

令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$;

(3) 设 A, B, C 的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 ,



$$f(x) - g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin 2x = 4\sin \frac{\pi}{12} \cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = 0,$$

$$\therefore 2x + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{不妨取 } x_1 = \frac{5\pi}{24}, x_2 = \frac{17\pi}{24}, x_3 = \frac{29\pi}{24},$$

$$\therefore AC = \frac{29\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} = \pi,$$

$$g(x_1) = 2\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{24}\right) = 2\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(2 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\pi}{2}.$$

4. 已知 $\vec{m} = (\sqrt{3}\sin\omega x, \cos\omega x)$, $\vec{n} = (\cos\omega x, -\cos\omega x) (\omega > 0, x \in \mathbf{R})$, $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2}$, 且 $f(x)$ 的图象上相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(3)若锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b = \sqrt{3}, f(B) = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【答案】(1) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

(2) $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$

(3) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【分析】(1) 根据数量积运算结合三角恒等变换化简 $f(x)$ 表达式, 结合周期公式求解;

(2) 根据正弦函数的单调性求解;

(3) 先求出 B , 然后用正弦定理得出, 利用余弦定理及基本不等式求出 ac 的取值范围, 再利用三角形面积公式求解.

【详解】(1) 由已知 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2} = (\sqrt{3}\sin\omega x, \cos\omega x) \cdot (\cos\omega x, -\cos\omega x) + \frac{1}{2}$
$$= \sqrt{3}\sin\omega x \cos\omega x - \cos^2\omega x + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x - \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$$

又 $f(x)$ 的图象上相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

可得 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 可得 $T = \pi = \frac{2\pi}{2\omega}$, 解得 $\omega = 1$,

所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

(2) 令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

解得 $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$;

(3) 因为 $b = \sqrt{3}, f(B) = 1$,

所以 $f(B) = \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

又 $0 < B < \pi$, 则 $2B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $B = \frac{\pi}{3}$.

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ 可得 $3 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \frac{\pi}{3} = a^2 + c^2 - ac$,

因为 $a^2 + c^2 \geq 2ac$, 所以 $3 \geq ac$, 即 $ac \leq 3$, 当且仅当 $a = c$ 时成立, 此时 $\triangle ABC$ 为等边三角形符合题意,

$S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

5. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) \left(0 < \omega < 2, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, $f(0) = \sqrt{3}$ 且 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $f(B) = 0$, $a = 4$, $\triangle ABC$ 的面积为

$2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】(1) $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$

(2) $6 + 2\sqrt{7}$

【分析】(1) 根据给定条件，结合正弦函数的图象、性质求出解析式.

(2) 由 (1) 求出 B ，再利用余弦定理、三角形面积公式及正弦定理求解.

【详解】(1) 由 $f(0) = 2\sin\varphi = \sqrt{3}$ ，得 $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，而 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，

由 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{6})$ 恒成立，可知 $f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin(\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3}) = 2$ ，即 $\sin(\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3}) = 1$ ， $\omega > 0$ ，

因此 $\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$ ，解得 $\omega = 12k + 1, k \in \mathbf{N}$ ，而 $0 < \omega < 2$ ，则 $\omega = 1$ ，

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$.

(2) 由 (1) 得， $f(B) = 2\sin(B + \frac{\pi}{3}) = 0$ ，而 $0 < B < \pi$ ，解得 $B = \frac{2\pi}{3}$ ，

由 $S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times 4c\sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ ，解得 $c = 2$ ，

由余弦定理得 $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times (-\frac{1}{2})} = 2\sqrt{7}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 6 + 2\sqrt{7}$.