

解三角形与三角函数

一、解答题

1. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 其中 $\omega > 0$.

(1) 求 ω 的值及函数 $y = f(x) - 1$ 的零点;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 点 D 为 AB 的中点. 若 B 为锐角, 且 $f(B) = 0$, $CD = \sqrt{3}$, $c = 4$, 求 b .

2. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \theta)$ ($\omega > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2}$) 的图象与函数 $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \tan 2x$ 的图象的一个交点为 $\left(\frac{\pi}{6}, y_0\right)$, 且函数 $f(x)$ 的最小正周期是函数 $g(x)$ 最小正周期的 2 倍.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = 2, b = 2, c = 4$, AM 是 BC 边上的中线, 求中线 AM 的长度.

3. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 且相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间和对称中心;

(3) 将 $f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象, 设 $f(x)$, $g(x)$ 图象相邻的三个交点为 A , B , C , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(参考数据: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$).

4. 已知 $\vec{m} = (\sqrt{3}\sin\omega x, \cos\omega x)$, $\vec{n} = (\cos\omega x, -\cos\omega x)$ ($\omega > 0, x \in \mathbf{R}$), $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2}$, 且 $f(x)$ 的图象上相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(3)若锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $b = \sqrt{3}, f(B) = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

5. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ $\left(0 < \omega < 2, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f(0) = \sqrt{3}$ 且 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $f(B) = 0$ ， $a = 4$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.