

独立性检验

一、单选题

1. 为比较甲、乙两所学校学生的数学水平，采用了如下方法：

第 1 步，科学抽样．采用简单随机抽样方法从两所学校共抽取 88 名学生，且对这 88 名学生进行测验；

第 2 步，收集数据．测验得到了如下数据：甲校 43 名学生中有 10 名数学成绩优秀；乙校 45 名学生有 7 名学生数学成绩优秀，并做出了如下的 2×2 列联表：

学校	数学成绩		合计
	不优秀	优秀	
甲校	33	10	43
乙校	38	7	45
合计	71	17	88

第 3 步，提出零假设．零假设 H_0 ：两校学生的数学成绩优秀率无差异，

第 4 步，计算．计算得到 $\chi^2 = \frac{88 \times (33 \times 7 - 10 \times 38)^2}{43 \times 45 \times 71 \times 17} \approx 0.837 < 2.706 = x_{0.1}$ ，

第 5 步：判断．根据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的 χ^2 独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为两校的数学成绩优秀率没有差异．

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ， $n = a + b + c + d$ ．

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

若将列联表中所有数据都扩大到原来的 10 倍，则下列说法正确的是（ ）

- A. 根据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的 χ^2 独立性检验，两校的数学成绩优秀率没有差异
- B. 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的 χ^2 独立性检验，两校的数学成绩优秀率没有差异

- C. 有 99%的把握认为学生的数学成绩是否优秀与学校有关
- D. 学生的数学成绩是否优秀与学校有关，该推断犯错误的概率不超过 0.001

【答案】C

【分析】列出新的列联表，计算 χ^2 后比较即可.

【详解】由题，列出新的列联表如下：

学校	数学成绩		合计
	不优秀	优秀	
甲校	330	100	430
乙校	380	70	450
合计	710	170	880

代入卡方公式：

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=880, a=330, b=100, c=380, d=70,$$

$$\text{所以 } \chi^2 = \frac{880 \times (330 \times 70 - 100 \times 380)^2}{430 \times 450 \times 710 \times 170} \approx 8.37,$$

$$8.37 > 6.635 = x_{0.01},$$

所以认为 “学生的数学成绩是否优秀与学校有关”，且有 99%的把握，
故 AB 错误.

且推断犯错误的概率不超过 0.01，不是 0.001，故 D 错误.

故选：C.

2. 为了了解疾病 A 是否与性别有关，在某医院随机地对入院的 50 人进行了问卷调查，得到了如下的列联表：则认为疾病 A 与性别有关的把握约为（ ）

	患疾病 A	不患疾病 A	总计
男	20	5	25
女	10	15	25
总计	30	20	50

$P(X^2 \geq k)$	0.05	0.01	0.005	0.001
k	3.841	6.635	7.879	10.828

A. 95%

B. 99%

C. 99.5%

D. 99.9%

【答案】C

【分析】根据所给的列联表数据计算 χ^2 ，将其与临界值表进行比较，即可得到答案.

【详解】由公式得 $\chi^2 = \frac{50 \times (20 \times 15 - 5 \times 10)^2}{25 \times 25 \times 30 \times 20} \approx 8.333 > 7.879$,

故有 $(1 - 0.005) \times 100\% = 99.5\%$ 的把握认为疾病 A 与性别有关,

故选: C

3. 为比较甲、乙两所学校学生的数学水平, 采用简单随机抽样的方法抽取 100 名学生. 通过测验得到如下的列联表:

单位: 人

学校	数学成绩		合计
	不优秀	优秀	
甲	40	10	50
乙	30	20	50
合计	70	30	100

附: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

下列结论正确的是 ()

A. 依据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验, 认为两校学生的数学成绩优秀率无差异

B. 依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 认为两校学生的数学成绩优秀率有差异

- C. 依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，认为两校学生的数学成绩优秀率有差异
- D. 依据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验，认为两校学生的数学成绩优秀率有差异

【答案】B

【分析】根据独立性检验的基本思想，结合已知计算得 $\chi^2 \approx 4.7619$ ，逐项进行分析即可求解.

【详解】零假设为 H_0 ：两校学生的数学成绩优秀率无差异，

$$\chi^2 = \frac{100(40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{50 \times 50 \times 70 \times 30} \approx 4.7619$$

A, 若 $\alpha = 0.1$ ，因为 $\chi^2 > 2.706$ ，故有充分的证据推断 H_0 不成立，

即两校学生的数学成绩优秀率有差异，故 A 错误；

B, 若 $\alpha = 0.05$ ，因为 $\chi^2 > 3.841$ ，故有充分的证据推断 H_0 不成立，

即两校学生的数学成绩优秀率有差异，故 B 正确；

C, 若 $\alpha = 0.01$ ，因为 $\chi^2 < 6.635$ ，故没有充分的证据推断 H_0 不成立，

即两校学生的数学成绩优秀率无差异，故 C 错误；

D, 若 $\alpha = 0.005$ ，因为 $\chi^2 < 7.879$ ，故没有充分的证据推断 H_0 不成立，

即两校学生的数学成绩优秀率无差异，故 D 错误.

故选：B

4. 千百年来，我国劳动人民在生产实践中根据云的形状、走向、速度、厚度、颜色等的变化，总结了丰富的“看云识天气”的经验，并将这些经验编成谚语，如“天上钩钩云，地上雨淋淋”“日落云里走，雨在半夜后”……小波同学为了验证“日落云里走，雨在半夜后”，观察了地区 A 的 100 天日落和夜晚天气，得到如下 2×2 列联表（单位：天），并计算得到

$\chi^2 \approx 19.05$ ，下列小波对地区 A 天气的判断不正确的是（ ）

日落云里走夜晚天气	下雨	未下雨
出现	25	5
未出现	25	45

参考公式： $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

临界值参照表：

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

- A. 夜晚下雨的概率约为 $\frac{1}{2}$
- B. 未出现“日落云里走”，夜晚下雨的概率约为 $\frac{5}{14}$
- C. 有 99% 的把握判断“日落云里走”是否出现与夜晚天气有关
- D. 出现“日落云里走”，有 99% 的把握判断夜晚会下雨

【答案】D

【分析】利用频率估算概率，结合观测值对照附表，对选项进行判断即可.

【详解】选项 A：根据列联表可知：100 天中有 50 天下雨，50 天未下雨，

因此夜晚下雨的概率约为 $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ ，故选项 A 正确；

选项 B：未出现“日落云里走”，夜晚下雨的概率约为 $\frac{25}{25+45} = \frac{5}{14}$ ，故选项 B 正确；

选项 C：因为 $\chi^2 \approx 19.05 > 6.635 = x_{0.01}$ ，所以据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，

可以认为“日落云里走”是否出现与夜晚天气有关，故选项 C 正确；

选项 D：依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，可判断“日落云里走，雨在半夜后”的说法犯错误的概率小于 0.01，但不代表一定会下雨，故选项 D 错误.

故选：D

5. 根据分类变量 x 与 y 的观测数据，计算得到 $\chi^2 \approx 0.837$ ，依据小概率值 $\alpha = 0.1$

($x_{0.1} = 2.706$) 的独立性检验，则 ()

- A. 变量 x 与 y 不独立
- B. 变量 x 与 y 独立
- C. 变量 x 与 y 不独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.1
- D. 变量 x 与 y 独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.1

【答案】B

【分析】根据独立性检验的概念可得正确的选项.

【详解】因为 $\chi^2 \approx 0.837 < x_{0.1} = 2.706$ ，所以在显著性水平 $\alpha = 0.1$ 下，

没有充分证据拒绝原假设，因此我们认为变量 x 与 y 是独立的，

故选：B

6. 某医疗研究所为了检验某种血清能起到预防感冒的作用，把 500 名使用血清的人与另外 500 名未使用血清的人一年中的感冒记录作比较，利用 2×2 列联表计算得 K^2 的观测值 $k^2 \approx 3.918$.

附表：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

则作出“这种血清能起到预防感冒的作用”出错的可能性不超过 ()

- A. 2.5% B. 5% C. 95% D. 97.5%

【答案】B

【分析】由独立性检验的原理的理解辨析可判断.

【详解】由题意知观测值 $k^2 \approx 3.918 > 3.841$ ，所以对照题中的附表可作出“这种血清能起到预防感冒的作用”出错的可能性不超过 5% 的结论.

故选：B

7. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2 = 4.881$. 已知 $P(\chi^2 \geq 7.879) = 0.005$ ，依据 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验，结论为 ()

- A. 变量 X 与 Y 独立
B. 变量 X 与 Y 独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.005
C. 变量 X 与 Y 不独立
D. 变量 X 与 Y 不独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.005

【答案】A

【分析】利用独立性检验规则来进行判断即可。

【详解】因为 $\chi^2 = 4.881 < 7.879$ ，所以没有充分的证据推断变量 X 与 Y 不相互独立，即认为变量 X 与 Y 独立，故 BCD 错误，A 正确；

故选：A.

8. 在性别与吃零食这两个分类变量的计算中, 下列说法正确的是 ()

- ①若 χ^2 的观测值为 $k = 6.635$, 我们有 99% 的把握认为吃零食与性别有关系, 那么在 100 个吃零食的人中必有 99 人是女性;
- ②从独立性检验可知有 99% 的把握认为吃零食与性别有关系时, 我们说某人吃零食, 那么此人是女性的可能性为 99%;
- ③若从统计量中求出有 99% 的把握认为吃零食与性别有关系, 是指有 1% 的可能性使得出的判断出现错误.

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ③

【答案】D

【分析】由独立性检验相关概念可得答案.

【详解】①若 χ^2 的观测值为 $k > 6.635$, 我们有 99% 的把握认为吃零食与性别有关系, 那么在 100 个吃零食的人中必有 99 人是女性, 故①不正确;

②独立性检验是用来考察两个分类变量是否具有关联性, 并且能较精确地给出这种判断的可靠程度,

而不是给出事件的概率, 故②不正确;

③若从统计量中求出有 99% 的把握认为吃零食与性别有关系, 是指有 1% 的可能性使得出的判断出现错误, ③正确。

故选: D

9. 为了考察某种营养液对有机蔬菜的增产效果, 某研究所进行试验, 获得数据, 经过计算得到 $\chi^2 \approx 3.921$, 其中 $P(\chi^2 > 3.841) = 0.05$, 那么可以认为该营养液对有机蔬菜的增产有效效果的把握为 ()

A. 90% 以上

B. 95% 以上

C. 99% 以上

D. 95% 以下

【答案】B

【分析】根据独立性检验的相关概念可得答案.

【详解】因为 $\chi^2 \approx 3.921 > 3.841$, 所以认为该营养液对有机蔬菜的增产有效效果的把握为 95% 以上.

故选: B.