

概率练习

一、填空题

1. 一个袋子里放有除颜色外完全相同的2个白球、3个红球，若采取有放回的抽样方式，从中依次摸出两个小球，则两个小球颜色不同的概率为_____；若采取不放回的抽样方式，从中依次摸出两个小球，则在第一次摸到的是红球的条件下，第二次摸到的是红球的概率为_____.

【答案】 $\frac{12}{25}$ / 0.48 $\frac{1}{2}$ / 0.5

【知识点】有放回与无放回问题的概率、计算古典概型问题的概率、计算条件概率

【分析】第一空分先白后红和先红后白两种情况，由概率公式计算；第二空利用条件概率公式即可求解.

【详解】第一空：

令事件 A 表示用放回抽样方式摸出两个颜色不同的小球，

所以每次摸一个白球的概率为 $\frac{2}{5}$ ，每一次摸一个红球的概率为 $\frac{3}{5}$ ，

所以 $P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$ ，

第二空：

令事件 B_i 表示不放回的抽样方式第 i 次摸到红球， $i = 1, 2$ ，

$P(B_1) = \frac{3}{5}$ ， $P(B_1 B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ ，

所以在第一次摸到红球的条件下，第二次摸到红球的概率为

$P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$.

2. 将颜色分别红、黄、蓝的三个小球放入甲、乙、丙三个盒子中，每个小球放入各个盒子的概率均为 $\frac{1}{3}$ ，且互不影响，则三个小球分别放入不同盒子的概率为_____；在至少有两个小球放入甲盒的前提下，红球放入甲盒的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{9}$ $\frac{5}{7}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、计算条件概率

【分析】先确定三个小球放盒子的总基本事件数，再确定三个小球放入不同盒子的基本事件数，最后用古典概型概率公式计算概率；设事件 B 为“至少有两个小球放入甲盒”，事件 A 为“红球放入甲盒”，计算 $P(B)$ 和 $P(AB)$ ，再根据条件概率公式计算概率。

【详解】每个小球有 3 种放法，总放法共 $3^3 = 27$ 种，

三个小球放入不同盒子，相当于对三个盒子全排列，共 $A_3^3 = 3! = 6$ 种符合条件的放法，

因此所求概率为 $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ ；

设事件 B ：至少两个小球放入甲盒；事件 A ：红球放入甲盒，

至少两个小球放入甲盒，分恰好 2 个、恰好 3 个放入甲盒两种情况：

$$n(B) = C_3^2 \cdot 2 + C_3^3 = 3 \times 2 + 1 = 7；$$

红球放入甲盒，且至少两个小球放入甲盒，说明剩余黄、蓝两球至少一个放入甲盒：

$$n(AB) = C_2^1 \cdot 2 + C_2^2 = 2 \times 2 + 1 = 5；$$

$$\text{因此条件概率 } P(A|B) = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{5}{7}.$$

3. 袋中有除颜色外均相同的 7 个球，其中 4 个红球和 3 个白球. 不放回抽取 3 个球，其中两个红球和一个白球的概率为_____；在前两个是红球的条件下，第三个是白球的概率为_____.

【答案】 $\frac{18}{35}$ $\frac{3}{5}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、计算条件概率

【分析】第 1 空考查古典概型，代入古典概型公式分别求出分子和分母的事件总数，计算即可；

第 2 空考查条件概率，根据条件概率公式，分别求出事件 A 的概率，以及事件 A 和 B 同时发生的概率，代入公式计算即可.

$$\text{【详解】解： } P(\text{两个红球和一个白球}) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{6 \times 3}{35} = \frac{18}{35}；$$

设事件 A 为前两个是红球，事件 B 为第三个是白球，

$$\text{又 } P(A) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}, \quad P(AB) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}, \quad \text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{35}}{\frac{2}{7}} = \frac{3}{5},$$

即在前两个是红球的条件下，第三个是白球的概率为 $\frac{3}{5}$.

4. 甲、乙两人进行多轮猜谜比赛，每轮比赛两人各答一题，已知每轮比赛中，甲、乙猜对的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$ ，每轮比赛中两人猜对与否互不影响，每轮结果互不影响，在一轮比赛中，恰有一人猜对的概率为_____；若两轮比赛中只有两次猜对，则这两次都是乙猜对的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ / 0.5 $\frac{1}{22}$

【知识点】利用对立事件的概率公式求概率、利用贝叶斯公式求概率、利用全概率公式求概率

【分析】根据独立事件的乘法公式计算可得第一空，利用全概率及贝叶斯公式可求第二空.

【详解】解：设每轮比赛中，甲猜对为事件 A ，乙猜对为事件 B ，

$$\text{则 } P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{4}, P(\bar{B}) = \frac{1}{2},$$

在一轮比赛中，恰有一人猜对为事件 C ，

$$P(C) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

设两轮比赛中只有两次猜对为事件 M ，

$$\text{则 } P(M) = 2P(AB)P(\bar{A}\bar{B}) + P(C)P(C) = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{32},$$

$$\text{则这两次都是乙猜对的概率为 } P = \frac{P(\bar{A}B)P(\bar{A}B)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{32}} = \frac{1}{22}.$$

5. 袋中装着标有数字1,2,3,4,5的小球各2个，从袋中任取3个小球，每个小球被取出的可能性都相等，用 X 表示取出的3个小球上的最大数字，则取出的3个小球上的数字互不相同的概率为_____；随机变量 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$ $\frac{13}{3} / 4\frac{1}{3}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、求离散型随机变量的均值

【分析】第一空：利用古典概型的概率公式和对立事件的概率公式可求出结果；第二空先求出 X 的可能取值为2,3,4,5，再求出 X 的每个取值的概率，由期望的计算公式，即可求解.

【详解】“取出的3个小球上的数字互不相同”记为事件 A ，

$$\text{则 } \bar{A} \text{ 为“取出的3个小球上有2个数字相同”，} \therefore P(\bar{A}) = \frac{C_5^1 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{3}, \text{ 则 } P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

又由题意可知 X 的可能取值为 2, 3, 4, 5,

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_2^1 + C_2^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}, \quad P(X=3) = \frac{C_4^2 C_2^1 + C_4^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15},$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^2 C_2^1 + C_6^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}, \quad P(X=5) = \frac{C_8^2 C_2^1 + C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}.$$

可得 X 的分布列如表所示,

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$

$$\text{所以 } E(X) = 2 \times \frac{1}{30} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{8}{15} = \frac{13}{3}.$$

6. 天津的“海河游船”是领略津城魅力的经典项目.为回馈游客,游船码头推出了“幸运抽票”活动,规则如下:第一步:游客先从装有 3 个红球和 2 个白球(球除颜色外完全相同)的抽奖箱中,随机抽取 2 个球.若抽出的 2 个球颜色相同,则获得“A 组票箱”;若抽出的 2 个球颜色不同,则获得“B 组票箱”.第二步:“A 组票箱”内装有 2 张“夜游票”和 3 张“日游票”;“B 组票箱”内装有 4 张“夜游票”和 1 张“日游票”.游客从获得的票箱中,随机抽取 2 张票.若某游客在第一步获得“A 组票箱”的概率为_____;某游客完整参与该活动,最终恰好抽到 1 张“夜游票”的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$ / 0.4 $\frac{12}{25}$ / 0.48

【知识点】 计算古典概型问题的概率、利用全概率公式求概率

【分析】 由题意,由组合知识,全概率公式进行求解

【详解】 某游客在第一步获得“A 组票箱”,即抽出的 2 个球颜色相同,

抽到的 2 个球均为红色或白色,故概率为 $\frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$;

故游客在第一步获得“B 组票箱”的概率为 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$,

从“A 组票箱”中恰好抽到 1 张“夜游票”的概率为 $\frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$,

从“B 组票箱”中恰好抽到 1 张“夜游票”的概率为 $\frac{C_4^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{2}{5}$,

所以游客完整参与该活动，最终恰好抽到 1 张“夜游票”的概率为 $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$.

7. 立德中学高三年级进行新年联欢，有一个抽奖游戏，箱子中放了 100 个一样规格的红包，里面分别放入 1, 2, 3, ..., 99, 100 元，若从中随机抽取两个红包，其中一个超过 50 元，另一个不超过 50 元的概率为_____；若依次（不放回）抽两次红包，得到的奖金数额之和为偶数的概率为_____.

【答案】 $\frac{50}{99}$ $\frac{49}{99}$

【知识点】组合数的计算、计算古典概型问题的概率、排列数的计算

【分析】根据古典概型，排列组合及分类分步计数原理即可求解.

【详解】由题知，从箱子中随机抽取两个红包，其中一个超过 50 元，另一个不超过 50 元的概率为 $\frac{C_{50}^1 C_{50}^1}{C_{100}^2} = \frac{50}{99}$ ；

100 个红包中，奖金数额为奇数的有 50 个，奖金数额为偶数的有 50 个，两次抽到的奖金数额之和为偶数，情况有 2 种，两次抽到都是奇数或偶数，

所以依次（不放回）抽两次红包，得到的奖金数额之和为偶数的概率为 $\frac{A_{50}^2 + A_{50}^2}{A_{100}^2} = \frac{49}{99}$.

8. 一个袋子里有大小和质地相同的 4 个球，标号为 1, 2, 3, 4，从中有放回地随机取球，每次取 1 个球，共取 4 次，把每次取出的球的标号排成一列数，则这列数中恰有 3 个不同整数的概率为_____.在恰有三个不同整数的前提下第二次取到 3 的概率是_____.

【答案】 $\frac{9}{16}$ $\frac{1}{4}$

【知识点】分步乘法计数原理及简单应用、实际问题中的组合计数问题、计算古典概型问题的概率、计算条件概率

【分析】利用分步计数原理求出取出四个球的总情况数，利用排列组合公式先选再排求出恰有 3 个不同整数的情况数即可；分取到两个 3 和取到一个 3 两种情况求出在恰有三个不同整数的前提下第二次取到 3 的情况数，利用古典概型求解即可.

【详解】放回地随机取球，每次取 1 个球，共取 4 次，把每次取出的球的标号排成一列数，所有可能的结果共有 $4^4 = 256$ 种，

其中这列数中恰有 3 个不同整数有 $C_4^2 A_4^3 = 6 \times 24 = 144$ 种，从而这列数中恰有 3 个不同整数的

概率为 $P = \frac{144}{256} = \frac{9}{16}$,

在恰有三个不同整数的前提下第二次取到 3 共有 $C_3^1 A_3^2 + C_3^2 A_3^2 = 3 \times 6 + 3 \times 6 = 36$ 种情况,

从而在恰有三个不同整数的前提下第二次取到 3 的概率 $P_1 = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$.

9. 已知某盒中装有 6 个大小、质地一致的乒乓球, 其中有 4 个新球 (从未被使用过) 2 个旧球, 第一次比赛时从此盒中任取 2 个球来使用. 赛后仍将两球放回盒中, 第二次比赛时再从此盒中任取 2 个球使用.

①第二次比赛时取出的 2 个球都是新球的概率为 _____.

②在第一次比赛时取出 2 个旧球, 赛后将两球放回盒中的条件下, 第二次比赛时取出 2 个新球的概率为 _____.

【答案】 $\frac{4}{25}/0.16$ $\frac{2}{5}/0.4$

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率

【分析】①以第一次取球的三种情况为完备事件组, 用全概率公式, 分别计算各情况概率与对应条件下第二次取 2 个新球的概率, 再加权求和得到结果; ②在第一次取 2 个旧球的前提下, 盒中球数与种类不变, 直接计算此时第二次取 2 个新球的条件概率.

【详解】设 A_i 表示“第一次取出 i 个新球” ($i=0,1,2$), B 表示“第二次取出 2 个新球”, 总取法 $C_6^2=15$,

① 求第二次取出 2 个都是新球的概率:

用全概率公式: $P(B) = P(A_0)P(B|A_0) + P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$,

A_0 (第一次取 0 新 2 旧): $P(A_0) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$, 未使用新球, 盒中仍 4 新 2 旧, 故

$$P(B|A_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15},$$

A_1 (第一次取 1 新 1 旧): $P(A_1) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$, 用了 1 个新球变为旧球, 盒中剩 3 新 3 旧,

$$\text{故 } P(B|A_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15},$$

A_2 (第一次取 2 新 0 旧): $P(A_2) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}$, 用了 2 个新球变为旧球, 盒中剩 2 新 4 旧, 故

$$P(B|A_2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$\text{代入计算: } P(B) = \frac{1}{15} \times \frac{6}{15} + \frac{8}{15} \times \frac{3}{15} + \frac{6}{15} \times \frac{1}{15} = \frac{36}{225} = \frac{4}{25};$$

② 条件概率：第一次取 2 个旧球的条件下，第二次取 2 个新球的概率：

已知第一次取出 2 个旧球，没有使用新球，放回后盒中仍然是 4 个新球、2 个旧球，

$$\text{因此条件概率: } P(B|A_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

【点睛】本题考查全概率公式和条件概率，核心逻辑：新球使用后变为旧球，放回后盒中新球数量会发生变化.

10. 某地区有 A 、 B 两个城区，人口比例为 7:3，由于人口密度不同， A 、 B 两地的流感感染率分别为 20%、5%. 若随机选取 A 地区的 3 名市民进行该流感检测，至少 1 人感染的概率为 _____；若该地区随机选取 1 名市民进行该流感检测，则感染的概率为 _____.

【答案】 $\frac{61}{125}/0.488$ $0.155/\frac{31}{200}$

【知识点】利用对立事件的概率公式求概率、利用全概率公式求概率

【详解】第一空， A 地流感感染率为 20%，那么 A 地流感未感染率为 $1-0.2=0.8$ ，考虑至少一人感染的对立事件为 3 人都未感染，那么 3 人都未感染的概率为 $0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.512$.

$$\text{所以至少一人感染的概率为 } 1-0.512 = 0.488 = \frac{61}{125}.$$

第二空，因为 A 、 B 两个城区，人口比例为 7:3，所以人口占比分别为 $\frac{7}{10}, \frac{3}{10}$ ，

由全概率公式，该地区随机选取 1 名市民进行该流感检测，则感染的概率为

$$\frac{7}{10} \times 0.2 + \frac{3}{10} \times 0.05 = 0.155 = \frac{31}{200}.$$

11. 袋中有 2 个不同的红球和 3 个不同的白球，每次取 1 个球，若取出红球，则不放回袋中；若取出白球，则放回袋中. 连续取 3 次球，袋中还有 2 个红球的概率为 _____；若袋中还有 1 个红球，则第 2 次取出红球的概率为 _____.

【答案】 $\frac{27}{125}$ $\frac{20}{61}$

【知识点】计算条件概率、独立事件的乘法公式、互斥事件的概率加法公式、利用全概率公式求概率

【分析】先设事件，再应用独立事件概率乘积公式得出 $P(D)$ ，再应用概率乘法公式及互斥事件概率和公式得出 $P(C) = \frac{549}{1000}$ ，最后应用条件概率公式计算求解。

【详解】记“第 i 次取出白球为事件 A_i ”，“第 i 次取出红球为事件 B_i ”，“连续取球 3 次，袋中还有 2 个红球为事件 D ”，“连续取球 3 次，袋中还有 1 个红球为事件 C ”，事件 D 的发生，意味着三次取球中三次取到白球，

$$P(D) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125};$$

事件 C 的发生，意味着三次取球中有且仅有一次取到红球，该次可能是第一次、第二次或第三次，这三种情况互斥，

$$\text{则 } P(C) = P(B_1C) + P(B_2C) + P(B_3C),$$

$$\text{因为 } P(B_1C) = P(B_1A_2A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{40},$$

$$P(B_2C) = P(A_1B_2A_3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{50},$$

$$P(B_3C) = P(A_1A_2B_3) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{18}{125},$$

$$\text{所以 } P(C) = \frac{9}{40} + \frac{9}{50} + \frac{18}{125} = \frac{549}{1000},$$

$$\text{所以 } P(B_2|C) = \frac{P(B_2C)}{P(C)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{549}{1000}} = \frac{20}{61}.$$

12. 盒中有 4 个白球、6 个黑球（这些球除颜色外没有其他差异）.随机从中抽取一个球，观察其颜色后放回，并放入 2 个与取出的球同色的球，再次从盒中随机取出一个球.则第二次取出的球是白球的概率为_____；在第一次取出白球的条件下，第二次取出的球是白球的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}/0.4$ $\frac{1}{2}/0.5$

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率

【分析】记事件 A :第一次取出白球，记事件 B :第二次取出白球，分析第一次摸球后，盒子中球的变化，结合古典概型的概率公式可求得 $P(B|A)$ 的值，利用全概率公式可求得 $P(B)$ 的值.

【详解】记事件 A :第一次取出白球，记事件 B :第二次取出白球，则 $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(\bar{A}) = \frac{3}{5}$,

若第一次取出白球，并放入2个与取出的球同色的球，盒子中有6个白球、6个黑球，

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{1}{2},$$

若第一次取出黑球，并放入2个与取出的球同色的球，盒子中有4个白球、8个黑球，

$$P(B|\bar{A}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5},$$

故答案为： $\frac{2}{5}$ ； $\frac{1}{2}$.

13. 袋内有大小相同的4个红球和3个白球，从中任取3个球；至少有1个是白球的概率为_____；在“抽取的3个球中至少有1个红球”的前提下“抽取的3个球中全是红球”的概率是_____.

【答案】 $\frac{31}{35}$ $\frac{2}{17}$

【知识点】利用对立事件的概率公式求概率、计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】利用对立事件概率的性质以及条件概率公式直接求解即可.

【详解】记事件 A 为“全是红球”，则 $P(A) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$ ，

记事件 B 为“至少有1个是白球”，则 $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$ ，

记事件 C 为“至少有1个红球”，则 $P(C) = 1 - \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{34}{35}$

则事件 AC 为“全是红球”，则 $P(AC) = P(A) = \frac{4}{35}$

所以“抽取的3个球中至少有1个红球”的前提下“抽取的3个球中全是红球”的概率是

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{34}{35}} = \frac{2}{17} .$$

故答案为： $\frac{31}{35}$ ； $\frac{2}{17}$.

14. 某校发起“AI 赋能乡村教育”公益项目，项目团队下设技术研发组5人、课程设计组3人.为推进乡村高中智能教学设备落地，需从两个组中随机抽取2人组成执行小组.抽取的2人中恰好有1名课程设计组人员的概率为_____；已知抽取的2人中至少有1名课程设计组成员，其中恰好有1名课程设计组人员的概率为_____.

【答案】 $\frac{15}{28}$ $\frac{5}{6}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、实际问题中的组合计数问题

【分析】利用组合公式和条件概率公式进行计算.

【详解】从 $5+3=8$ 人中随机抽取 2 人的总组合数为 $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$ 种,

从 3 名课程设计组成员中选 1 人, 有 $C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3}{1} = 3$ 种选法

, 从 5 名技术研发组成员中选 1 人, 有 $C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5}{1} = 5$ 种选法,

所以根据分步乘法原理可得, 恰好有 1 名课程设计组成员的选法共有 $C_3^1 \times C_5^1 = 3 \times 5 = 15$ 种,

根据古典概率公式可得: 抽取的 2 人中, 恰好有 1 名课程设计组成员的概率为 $\frac{15}{28}$,

从 5 名技术研发组成员中选 2 人的组合数为 $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 种,

所以没有课程设计组成员的概率为 $\frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28}$,

则至少有 1 名课程设计组成员的概率为 $1 - \frac{10}{28} = \frac{18}{28}$,

设事件 A 为“抽取的 2 人中恰好有 1 名课程设计组成员”, 事件 B 为“抽取的 2 人中至少有 1 名课程设计组成员”, 则所求概率为 $P(A|B)$,

根据条件概率公式可得: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$,

又因为 $A \subseteq B$, 所以 $P(AB) = P(A) = \frac{15}{28}$,

则 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{28}}{\frac{18}{28}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.

故答案为: $\frac{15}{28}$; $\frac{5}{6}$

15. 一个盒子装有 8 个除颜色及等级外完全相同的乒乓球, 其中白球有 4 个一星“☆”, 2 个二星“☆☆”; 黄球有 1 个一星“☆”, 1 个二星“☆☆”. 每次从盒子中随机摸出 1 个球, 摸出的球不再放回. 若摸出白球即停止, 则摸出的球中没有二星球的概率为_____; 若连续摸两次, 在第 1 次摸出白球的条件下, 第 2 次摸出二星球的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$ $\frac{8}{21}$

【知识点】计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】利用互斥事件的概率可求第一空答案，利用条件概率的公式可求第二空的答案.

【详解】设事件 A = “摸出的球中没有二星球”，则事件 A 包含两个互斥事件：第一次摸出了白色一星球，第一次摸出了黄色一星球同时第二次摸出了白色一星球，

$$P(A) = \frac{C_4^1}{C_8^1} + \frac{C_1^1 C_4^1}{C_8^1 C_7^1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} = \frac{4}{7}.$$

设事件 B = “第 1 次摸出白球”，事件 C = “第 2 次摸出二星球”，

$$P(B) = \frac{C_6^1}{C_8^1} = \frac{3}{4}, \quad P(BC) = \frac{C_4^1}{C_8^1} \times \frac{C_3^1}{C_7^1} + \frac{C_2^1}{C_8^1} \times \frac{C_2^1}{C_7^1} = \frac{3}{14} + \frac{1}{14} = \frac{2}{7},$$

$$\text{所以 } P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{21}.$$

故答案为： $\frac{4}{7}$ $\frac{8}{21}$

16. 在一个抽奖游戏中，主持人从编号为 1, 2, 3, 4 的四个外观相同的空箱子中随机选择一个放入奖品，即主持人知道奖品在哪个箱子里，当抽奖人选择了某个箱子后，主持人先随机打开不同于被选择的另一个没有奖品的箱子，并问抽奖人是否愿意更改选择. 用 A_i 表示 i 号箱有奖品 ($i=1,2,3,4$)，用 B_i 表示主持人打开 i 号箱子 ($i=1,2,3,4$)，现在已知抽奖人选择了 1 号箱，则 $P(B_3|A_2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $P(B_3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}/0.5$ $\frac{1}{3}$

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率

【分析】由题意结合条件概率定义即可分析求解 $P(B_3|A_2)$ ，依次求出

$P(B_3|A_1), P(B_3|A_3), P(B_3|A_4)$ ，再由全概率公式即可求解 $P(B_3)$.

【详解】抽奖人选择了 1 号箱，则由题意在 2 号箱有奖品条件下主持人选择打开 3 号箱或 4 号箱，故可得 $P(B_3|A_2) = \frac{1}{2}$ ；

同理可求得 $P(B_3|A_1) = \frac{1}{3}, P(B_3|A_3) = 0, P(B_3|A_4) = \frac{1}{2}$,

所以由全概率公式可得

$$P(B_3) = P(A_1)P(B_3|A_1) + P(A_2)P(B_3|A_2) + P(A_3)P(B_3|A_3) + P(A_4)P(B_3|A_4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

17. 甲、乙、丙、丁四位同学到 A, B, C, D 四个大学的实验室参观, 每人只去一个大学, 设事件 M 为“4 个人去的大学各不相同”, 事件 N 为“只有甲去了 A 大学”, 则 $P(M) = \underline{\hspace{2cm}}$; $P(M|N) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{32}$ $\frac{2}{9}$

【知识点】分步乘法计数原理及简单应用、计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】先根据乘法原理得每人只去一个大学共有 $4^4 = 256$ 种不同情况, 再分别讨论事件 M, N, MN 的不同情况, 最后根据古典概率模型与条件概率公式求解对应概率即可.

【详解】甲、乙、丙、丁四位同学到 A, B, C, D 四个大学的实验室参观,

每人只去一个大学, 共有 $4^4 = 256$ 种不同情况;

事件 M 为“4 个人去的大学各不相同”, 共有 $A_4^4 = 24$ 种不同情况,

事件 N 为“只有甲去了 A 大学”, 共有 $3^3 = 27$ 种不同情况,

事件 MN 为“甲去了 A 大学且 4 个人去的大学各不相同”, 共有 $A_3^3 = 6$ 种不同情况,

所以 $P(M) = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$, $P(N) = \frac{27}{256}$, $P(MN) = \frac{6}{256}$,

所以 $P(M|N) = \frac{P(MN)}{P(N)} = \frac{\frac{6}{256}}{\frac{27}{256}} = \frac{2}{9}$.

故答案为: $\frac{3}{32}; \frac{2}{9}$

18. 甲、乙两名同学参加一场乒乓球比赛, 比赛共五局 (无平局), 先赢三局者取得比赛最终胜利. 已知第一局乙同学获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 且对于每一局, 若乙同学在本局中获胜, 则他在下一局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$; 若乙同学在本局中未获胜, 则他在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$. 甲同学第二局比赛获胜的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 在比赛三局即结束的条件下, 乙同学取得比赛最终胜利的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{9}$ $\frac{1}{3}$

【知识点】计算条件概率、独立事件的乘法公式、互斥事件的概率加法公式、利用全概率公式求概率

【分析】根据全概率公式及独立事件的概率乘法公式, 分类讨论甲第二局获胜的不同情况,

求和得甲第二局获胜的概率；再根据条件概率公式，求出各事件的概率，根据公式求出条件概率.

【详解】第一局乙同学获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，则第一局甲同学获胜的概率为 $\frac{2}{3}$

对于每一局，若乙同学在本局中获胜，则他在下一局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ，即甲同学在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，

若乙同学在本局中未获胜，则他在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，即甲同学在下一局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$.

故甲同学第二局比赛获胜的概率 $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

比赛三局即结束，则甲连胜三局或乙连胜三局，

设事件 A 为“比赛进行三局即结束”，事件 B 为“乙取得比赛最终胜利”

则 $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ， $P(AB) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ ，

故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{5}{9}$ ； $\frac{1}{3}$.

19. 某小学五年级有两个班，其中甲班科技课外兴趣小组有6人（4男2女），乙班科技课外兴趣小组有6人（3男3女），学校准备从五年级科技课外兴趣小组中随机挑选2个学生参加全市科技竞赛. 已知其中一个是男生的条件下，则另一个也是男生的概率

_____；若通过平时训练发现，如果两个参赛选手来自同一个班，默契程度会高一些，学校决定，先等可能地从两个班中随机选择一个班，再从该班中随机挑选两个同学参赛，则两个都是男生的概率_____.

【答案】  $\frac{3}{8}$ /0.375  $\frac{3}{10}$ /0.3

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率

【分析】第一空给出具体事件，根据条件概率公式求解即可；第二空根据全概率公式求解.

【详解】从五年级科技课外兴趣小组的12人中随机挑选2个学生，记“其中一个是男生”为事件 A_1 ，“另一个也是男生”为事件 A_2 ，

由题意知12人中有7男5女，

$$\text{则 } P(A_2|A_1) = \frac{n(A_1A_2)}{n(A_1)} = \frac{C_7^2}{C_{12}^2 - C_5^2} = \frac{21}{66-10} = \frac{3}{8}.$$

先等可能地从两个班中随机选择一个班，再从该班中随机挑选两名同学参赛，记“从甲班中选两个同学”为事件 B_1 ，“从乙班中选两个同学”为事件 B_2 ，“两个都是男生”为事件 C ，

因为等可能地从两个班中随机选择一个班，所以 $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ ，

又 $B_1 \cup B_2 = \Omega$ ，

所以 $P(C) = P(B_1)P(C|B_1) + P(B_2)P(C|B_2)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{C_4^2}{C_6^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} = \frac{3}{10}.$$

故答案为： $\frac{3}{8}$ ； $\frac{3}{10}$ 。

20. 有编号分别为 1, 2, 3, 4 的 4 个红球和 4 个黑球，从中取出 2 个，则取出的球同色的所有可能的结果有_____种；（用数字作答）若从中取出的球编号互不相同的概率为_____；

【答案】 12 $\frac{6}{7}$

【知识点】实际问题中的组合计数问题、计算古典概型问题的概率

【分析】根据“取出的球同色”包含取出 2 个红球或取出 2 个黑球两种情况求解第一空；对于第二空，先讨论取出的编号相同的情况，再根据总结果数计算编号互不相同的结果数，进而根据古典概型计算概率即可。

【详解】由题知“取出的球同色”包含两种情况：取出 2 个红球或取出 2 个黑球，

所以有 $C_4^2 + C_4^2 = 6 + 6 = 12$ 种结果；

从 8 个球（4 红 4 黑）中任意取 2 个，总结果数为 $C_8^2 = 28$ 种，

其中，取出“编号相同的 2 个球”即（红 1 黑 1）、（红 2 黑 2）、（红 3 黑 3）、（红 4 黑 4），共 4 种，

所以编号互不相同的结果数： $28 - 4 = 24$ 种，

所以若从中取出的球编号互不相同的概率为 $P = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$ 。

故答案为： 12； $\frac{6}{7}$ 。

21. 甲乙两人射击一架进入禁飞区的无人机.已知甲乙两人击中无人机的概率分别为 0.5，

0.4, 且甲乙射击互不影响, 则无人机被至少一人击中的概率为_____. 若无人机恰好被一人击中, 则被击落的概率为 0.2; 若恰好被两人击中, 则被击落的概率为 0.6, 那么无人机被击落的概率为_____.

【答案】 0.7 0.22

【知识点】利用对立事件的概率公式求概率、利用全概率公式求概率

【分析】根据对立事件的概率公式和全概率公式求解即可.

【详解】根据题意, 设甲击中无人机为事件 A , 乙击中无人机为事件 B , 无人机被击中为事件 C , 无人机被击落为事件 D ,

C 的对立事件为无人机没有被击中, 即事件 $\bar{A}\bar{B}$, 其概率 $P(\bar{A}\bar{B}) = (1-0.5)(1-0.4) = 0.3$,

则无人机被击中的概率 $P(C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - 0.3 = 0.7$.

若无人机恰好被一人击中, 记为事件 $M = A\bar{B} + \bar{A}B$, 其概率

$$P(M) = P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = (1-0.5) \times 0.4 + 0.5 \times (1-0.4) = 0.5.$$

若无人机恰好被两人击中, 记为事件 $N = AB$, 该概率

$$P(N) = P(AB) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.2.$$

$$\text{则 } P(D) = P(M)P(D|M) + P(N)P(D|N) = 0.5 \times 0.2 + 0.2 \times 0.6 = 0.22.$$

故答案为: 0.7; 0.22

22. 甲和乙两个箱子中各装有 10 个球, 其中甲箱有 5 个红球、5 个白球, 乙箱中有 4 个红球、6 个白球. 先从甲箱中随机摸出 1 个球放入乙箱中, 再从乙箱中随机摸出 1 个球, 则摸到红球的概率为_____; 若从甲箱中随机摸出 3 个球, 用 X 表示摸出红球的个数, 则随机变量 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{9}{22}$ $\frac{3}{2}$

【知识点】超几何分布的均值、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率

【分析】先运用全概率公式求摸到红球的概率, 再利用超几何分布的期望公式求随机变量 X 的数学期望即可.

【详解】①若先从甲箱摸出的是红球, 其概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,

放入乙箱后, 乙箱有 $4+1=5$ 个红球, 6 个白球 (共 11 个球),

此时再从乙箱摸出红球的概率为 $\frac{5}{11}$;

若从甲箱摸出的是白球，其概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ，

放入乙箱后，乙箱有 4 个红球， $6+1=7$ 个白球（共 11 个球），

此时从乙箱摸出红球的概率为 $\frac{4}{11}$ 。

由全概率公式，可得概率为： $\frac{1}{2} \times \frac{5}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{9}{22}$ ；

② X 服从超几何分布（超几何分布的期望公式为 $E(X) = n \times \frac{M}{N}$ ，

其中 $n=3$ 是抽取数， $M=5$ 是总体红球数， $N=10$ 是总体球数），

所以： $E(X) = 3 \times \frac{5}{10} = \frac{3}{2}$ 。

故答案： $\frac{9}{22}$ ； $\frac{3}{2}$ 。

23. 一质点从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发，每次随机沿一条边运动至另一个顶点时终止，则质点 4 次运动过程中仅 1 次经过顶点 B 的条件下，第 4 次回到顶点 A 的概率 $P = \underline{\hspace{2cm}}$ ，记质点 4 次运动过程中经过顶点 B 的次数是 X ，则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{3}{7}$ $\frac{23}{16}$

【知识点】计算条件概率、求离散型随机变量的均值、计算古典概型问题的概率

【分析】列举 4 次运动过程中仅 1 次经过顶点 B 的情况，再由古典概率公式即可求解；记质点 4 次运动过程中经过顶点 B 的次数是 X ， X 的所有可能取值为 0,1,2，分别求得相应概率，列出分布列，再求期望，即可求解。

【详解】因为质点 4 次运动过程中仅 1 次经过顶点 B 的情况有： $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$ ，
 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ ，
 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$ ， $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$ ，共 7 种，

第四次回到顶点 A 有 3 种，所以质点 4 次运动过程中仅 1 次经过顶点 B 的条件下，第 4 次回到顶点 A 的概率 $P = \frac{3}{7}$ 。

记质点 4 次运动过程中经过顶点 B 的次数是 X ， X 的所有可能取值为 0,1,2，

质点 4 次运动，共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 种情况，

当 $X=0$ 时， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$ ，共有 1 种情况，则 $P(X=0) = \frac{1}{16}$ ，

当 $X=1$ 时， $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$ ， $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C$ ，

$A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ ，

$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$, $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$, 共有 7 种情况,

所以 $P(X=1)=\frac{7}{16}$, 又 $P(X=2)=1-\frac{1}{16}-\frac{7}{16}=\frac{1}{2}$,

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X)=0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{23}{16},$$

故答案为: $\frac{3}{7}, \frac{23}{16}$.

24. 抛掷两枚质地均匀的骰子 (标记为 I 号和 II 号), 观察两枚骰子朝上面的点数. 记事件 A = “两个点数不相同”, 事件 B = “两个点数都没有出现 5 点”, 则 $P(B|A)$ = ____; 设 X 表示两个点数中奇数的个数, 则随机变量 X 的数学期望为 ____.

【答案】 $\frac{2}{3}$ 1

【知识点】 计算条件概率、求离散型随机变量的均值、计算古典概型问题的概率

【分析】 ①判断出符合古典概型, 列出样本空间, 找到满足事件 A , AB 的样本点, 根据条件概率公式求出 $P(B|A)$; ②列出 X 取值, 求出相应的概率, 得到随机变量 X 的分布列, 根据分布列求得其数学期望.

【详解】 记 I 号骰子朝上面的点数为 a , 记 II 号骰子朝上面的点数为 b , 则样本空间 $\Omega = \{(a, b) | a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ 共有 36 个样本点, 各样本点出现的可能性相同, 此试验为古典概型.

记事件 A = “两个点数不相同”, 则事件 $\bar{A}$ = “两个点数相同”, 事件

$\bar{A} = \{(a, a) | a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ 共有 6 个样本点, 所以事件 A 包含 30 个样本点.

因为事件 B = “两个点数都没有出现 5 点”, 所以事件 AB = “两个点数不相同, 且都没有出现 5 点”, 即事件 $AB = \{(a, b) | a \neq b, a, b \in \{1, 2, 3, 4, 6\}\}$ 共 20 个样本点.

$$\text{所以, } P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

由题可知, X 的取值为 0, 1, 2.

因为每枚骰子向上的点数中有 3 个奇数，3 个偶数，

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_3^1 C_3^1}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_3^1}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^1 C_3^1}{36} = \frac{1}{4}.$$

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$$

所以随机变量 X 的数学期望为 1.

故答案为： $\frac{2}{3}, 1$

25. 某志愿者组织召开春季运动会，为了组建一支朝气蓬勃、训练有素的赛会志愿者队伍，欲从 4 名男志愿者和 3 名女志愿者中随机抽取 3 人聘为志愿者队的队长，则①抽取的 3 人中至少有一名是女志愿者的概率为_____；②在“抽取的 3 人中至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的 3 人中全是男志愿者”的概率是_____.

【答案】 $\frac{31}{35}$ $\frac{2}{17}$

【知识点】 计算条件概率、利用对立事件的概率公式求概率

【分析】 本题包含两个概率计算问题，均需利用组合数及概率相关知识求解，第一个问题通过对立事件间接计算至少有一名女志愿者的概率；第二个问题利用条件概率公式，在给定前提条件下特定事件的概率.

【详解】 记全是男志愿者为事件 A ，至少有一名男志愿者为事件 B ，则

$$P(AB) = P(A) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}, \quad P(B) = 1 - \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{34}{35}.$$

记至少有一名是女志愿者为事件 C ，则事件 C 与事件 A 互为对立事件，

$$\text{则 } P(C) = 1 - P(A) = \frac{31}{35},$$

抽取的 3 人中至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的 3 人中全是男志愿者”的概率为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{34}{35}} = \frac{2}{17}.$$

故答案为： $\frac{31}{35}$ ； $\frac{2}{17}$.

26. 甲、乙、丙3人练习投篮,投进的概率分别是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$,若3人各投1次,则3人都没投进的概率为_____ ;若 X 表示丙投篮3次的进球数,则随机变量 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{2}{15}$ $\frac{9}{5}/1.8$

【知识点】独立事件的乘法公式、二项分布的均值、利用对立事件的概率公式求概率

【分析】先综合利用独立事件的概率公式与对立事件的概率公式求3人都没投进的概率,再判断随机变量 X 服从二项分布,直接利用二项分布的期望公式求解即可.

【详解】记事件“甲投篮1次投进”为 A_1 ,事件“乙投篮1次投进”为 A_2 ,事件“丙投篮1次投进”为 A_3 ,事件“3人都没有投进”为 A .

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{1}{3}, P(A_2) = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{3}{5},$$

$$P(A) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15},$$

所以3人都没有投进的概率为 $\frac{2}{15}$.

随机变量 X 的可能值有 0,1,2,3,且 $X \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$,

$$\text{所以 } E(X) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5},$$

故答案为: $\frac{2}{15}; \frac{9}{5}$

27. 猜灯谜是元宵节特色活动之一.甲、乙两人独立地参加了今年的元宵节猜灯谜活动,已知甲猜对的概率为 $\frac{3}{5}$,乙猜对的概率为 p ,甲、乙都猜不对的概率为 $\frac{2}{15}$.活动中,甲和乙猜对与否互不影响,则 $p =$ _____ ;甲、乙恰有一人猜对灯谜的概率_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{15}$

【知识点】互斥事件的概率加法公式、独立事件的乘法公式、利用对立事件的概率公式求概率

【分析】利用独立事件的乘法公式和对立事件的性质列式求解.

【详解】设事件 A : 甲猜对灯谜;事件 B : 乙猜对灯谜.

由题意, A 与 B 相互独立,且 $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{5}$, $P(B) = p$, $P(\overline{B}) = 1 - p$.

因为甲、乙都猜不对的概率为 $\frac{2}{15}$,所以 $P(\overline{A}\overline{B}) = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{2}{5}(1 - p) = \frac{2}{15} \Rightarrow p = \frac{2}{3}$.

甲、乙恰有一人猜对灯谜的概率为：

$$P(\overline{AB} + \overline{AB}) = P(\overline{AB}) + P(\overline{AB}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}$ ； $\frac{7}{15}$

28. 某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品，制作过程必须先后经过两次烧制，当第一次烧制合格后方可进入第二次烧制，再次烧制过程相互独立.根据该厂现有的技术水平，经过第一次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.5、0.6、0.4，经过第二次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.6、0.5、0.75；则第一次烧制后恰有一件产品合格的概率为_____；经过前后两次烧制后，合格工艺品的件数为 X ，则随机变量 X 的期望为_____.

【答案】 0.38 0.9

【知识点】独立事件的乘法公式、二项分布的均值、互斥事件的概率加法公式

【分析】分为只有甲合格，只有乙合格，只有丙合格，3 种情况，根据相互独立事件的概率乘法公式分别求出 3 种情况的概率，相加即可求得第一次烧制后恰有一件产品合格的概率；根据已知可求得每件工艺品经过两次烧制后合格的概率均为 $p = 0.3$ ，因为概率相同，可以把它们看成 3 次重复试验发生 k 次的概率，然后根据二项分布期望公式直接求解.

【详解】分别记甲、乙、丙经第一次烧制后合格为事件 A_1, A_2, A_3 ,

设表示第一次烧制后恰好有一件合格，

$$\text{则 } P(M) = P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3)$$

$$= 0.5 \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.6 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 \times 0.4 = 0.38;$$

经过前后两次烧制后，甲合格的概率为 $0.5 \times 0.6 = 0.3$ ，乙合格的概率为 $0.6 \times 0.5 = 0.3$ ，丙合格的概率为 $0.4 \times 0.75 = 0.3$ ，

则每件工艺品经过两次烧制后合格的概率均为，

所以 $X \sim B(3, 0.3)$ ，所以 $EX = np = 3 \times 0.3 = 0.9$.

故答案为：0.38；0.9.

29. 某学习小组有男生 4 人，女生 3 人，现需从中抽取 2 人参加学校开展的 AI 人工智能学习，则恰有一名男生参加的概率为_____；在有女生参加学习的条件下，恰有一名女生参加 AI 人工智能学习的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{5}/0.8$

【知识点】计算条件概率、求超几何分布的概率、实际问题中的组合计数问题、计算古典概型问题的概率

【分析】利用超几何概型的概率、古典概型求法及组合数求概率即可.

【详解】由题设, 恰有一名男生参加的概率为 $P_1 = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$,

有女生参加学习的条件下, 恰有一名女生参加的概率为 $P_2 = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_4^1 C_3^1 + C_3^2} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

故答案为: $\frac{4}{7}, \frac{4}{5}$

30. 商场为了迎接促销, 举办抽奖活动, 奖池内有编号为1-4的大小相同、质地均匀的4个乒乓球. 乒乓球上的编号对应着获奖等级: 一等奖、二等奖、三等奖、四等奖(鼓励奖). 规则是: 每人可连续抽奖2次, 每次抽完后将乒乓球放回奖池, 记第*i*次抽到的奖品等级为 $X_i (i=1, 2)$, 某顾客第一次没有抽到一等奖, 且第二次抽到一等奖的概率是_____ ; 用 $Z = |X_2 - X_1|$ 表示“两次抽到的等级差”, 则Z的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{3}{16}$; $\frac{5}{4}/1.25$.

【知识点】独立事件的乘法公式、求离散型随机变量的均值、计算古典概型问题的概率

【分析】第一次没抽到一等奖和第二次抽到一等奖, 为相互独立事件, 根据古典概型和相互独立事件的概率乘法即可求解;

对于随机变量Z的数学期望, 先确定随机变量Z的取值, 再根据古典概型分别计算每个取值的对应概率, 最后根据数学期望公式计算即可.

【详解】因为每次抽完后将乒乓球放回奖池, 所以每次抽奖相互独立.

则根据题意, 第一次没有抽到一等奖的概率为 $\frac{3}{4}$, 第二次抽到一等奖的概率为 $\frac{1}{4}$.

由于两次抽奖是相互独立事件, 根据独立事件概率乘法公式,

可得某顾客第一次没有抽到一等奖, 第二次抽到一等奖的概率是 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

根据题意, 随机变量 $Z = |X_2 - X_1|$, X_1 、 X_2 分别表示第一次和第二次抽奖的获奖等级,

则 X_1 、 $X_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, 所以Z的取值可能为0、1、2、3, 两次抽奖等级共有 $4 \times 4 = 16$ 种情况,

则 $Z = 0$ 表示两次抽奖等级相同, 共有4种情况,

即 $X_1 = X_2 = 1$, $X_1 = X_2 = 2$, $X_1 = X_2 = 3$, $X_1 = X_2 = 4$, 所以 $P(Z=0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$,

$Z=1$ 表示两次抽奖等级相差 1, 共有 6 种情况,

即 $X_1 = 1, X_2 = 2$, $X_1 = 2, X_2 = 3$, $X_1 = 3, X_2 = 4$, $X_1 = 2, X_2 = 1$,

$X_1 = 3, X_2 = 2$, $X_1 = 4, X_2 = 3$, 所以 $P(Z=1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$,

$Z=2$ 表示两次抽奖等级相差为 2, 共有 4 种情况,

即 $X_1 = 1, X_2 = 3$, $X_1 = 2, X_2 = 4$, $X_1 = 3, X_2 = 1$, $X_1 = 4, X_2 = 2$,

所以 $P(Z=2) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$,

$Z=3$ 表示两次抽奖等级相差为 3, 共有 2 种情况, 即 $X_1 = 1, X_2 = 4$, $X_1 = 4, X_2 = 1$,

所以 $P(Z=3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$,

所以, Z 的数学期望 $E(Z) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$.

故答案为: $\frac{3}{16}; \frac{5}{4}$

31. 某公园有甲、乙两个相邻景点, 原拟定甲景点内有 2 个 A 班同学和 2 个 B 班同学; 乙景点内有 2 个 A 班同学和 3 个 B 班同学, 后由于某种原因, 甲、乙两个景点各有一个同学交换景点观光, 则甲景点恰有 2 个 A 班同学的概率为_____; 甲景点 A 班同学数 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ $\frac{19}{10}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、写出简单离散型随机变量分布列、求离散型随机变量的均值

【分析】(1) 根据题意, 甲景点恰有 2 个 A 班同学有两种情况, 互换的是 A 班同学或互换的是 B 班同学, 利用组合及古典概型求出概率即可; (2) 由题知 X 的取值可能为 1, 2, 3, 利用组合及古典概型求出概率, 根据公式得到期望.

【详解】(1) 甲、乙两景点各有一个同学交换后, 甲景点恰有 2 个 A 班同学有两种情况: 互换的是 A 班同学, 此时甲景点恰有 2 个 A 班同学的事件记为 A_1 ,

$$P(A_1) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^1 C_5^1} = \frac{1}{5},$$

互换的是 B 班同学, 此时甲景点恰有 2 个 A 班同学的事件记为 A_2 ,

$$P(A_2) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_4^1 C_5^1} = \frac{3}{10},$$

所以甲景点恰有 2 个 A 班同学的概率 $P = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$.

(2) 由题知 X 的取值可能为 1, 2, 3,

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_4^1 C_5^1} = \frac{3}{10}, \quad P(X=2) = \frac{1}{2}, \quad P(X=3) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^1 C_5^1} = \frac{1}{5},$$

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{19}{10}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}; \frac{19}{10}$.

32. 盒中有 4 个球, 其中有 2 个白球, 2 个黑球, 从中随机取球, 若每次取 1 个, 不放回, 取到黑球为止, 则第 2 次取到黑球的概率 $P = \underline{\quad\quad}$; 若每次取 1 个, 放回, 取到黑球停止, 且取球不超过 3 次, 设此过程取到白球的个数为 X , 则 $P(X \geq 2) = \underline{\quad\quad}$.

【答案】 $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$

【知识点】有放回与无放回问题的概率、独立重复试验的概率问题、计算古典概型问题的概率

【分析】第一空计算时注意不放回的取, 由题意计算第一次取到白球, 第二次取到黑球的概率, 再利用概率的乘法公式计算, 即可求出结果;

第二空计算时注意放回的取, 每次取到黑球或白球的概率不变, 计算 $P(X=2), P(X=3)$, 由 $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$ 即得结果.

【详解】若每次取 1 个, 不放回, 取到黑球为止, 因为第二次取到黑球, 则第一次取到的一定是白球, 所以概率 $P = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

若每次取 1 个, 放回, 则取到的白球的个数 X 的分布列如下表.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}$.

33. 2025 年是中国人民抗日战争暨世界反法西斯战争胜利 80 周年, 为激发民众的爱国热情和民族自豪感, 某地举办相关知识竞答活动. 在决赛中, 每轮活动由甲、乙各答一个问题, 已知甲每轮答对的概率为 $\frac{1}{4}$, 乙每轮答对的概率为 $\frac{2}{5}$. 在每轮活动中, 甲和乙答对与否互不影响, 各轮结果也互不影响, 则乙在两轮活动中恰好答对一个问题的概率为_____; 两人在两轮活动中共答对 3 个问题的概率为_____.

【答案】 $\frac{12}{25}$ $\frac{9}{100}$

【知识点】利用互斥事件的概率公式求概率、独立事件的乘法公式

【分析】设事件甲第 i 轮答对为 A_i , 事件乙第 i 轮答对为 B_i , $i=1,2$, 设事件乙在两轮活动中恰好答对 t 个问题为 F_t , $t=1,2$, 则 $F_1 = B_1\overline{B_2} + \overline{B_1}B_2$, 结合互斥事件的概率加法公式和独立事件定义求 $P(F_1)$, 设事件甲在两轮活动中恰好答对一个问题为 E_x , $x=1,2$, 根据概率加法公式和独立事件定义求 $P(E_1), P(E_2), P(F_2)$, 再求 $P(E_1F_2 + E_2F_1)$ 可得结论.

【详解】设事件甲第 i 轮答对为 A_i , 事件乙第 i 轮答对为 B_i , $i=1,2$,

则 A_1, A_2, B_1, B_2 相互独立, 且 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{4}$, $P(B_1) = P(B_2) = \frac{2}{5}$,

$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $P(\overline{B_1}) = P(\overline{B_2}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$,

设事件乙在两轮活动中恰好答对 t 个问题为 F_t , $t=1,2$,

则 $F_1 = B_1\overline{B_2} + \overline{B_1}B_2$, 其中事件 $B_1\overline{B_2}$, $\overline{B_1}B_2$ 互斥,

所以 $P(F_1) = P(B_1\overline{B_2} + \overline{B_1}B_2) = P(B_1\overline{B_2}) + P(\overline{B_1}B_2) = P(B_1)P(\overline{B_2}) + P(\overline{B_1})P(B_2)$,

所以 $P(F_1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$, 故乙在两轮活动中恰好答对一个问题的概率为 $\frac{12}{25}$,

设事件甲在两轮活动中恰好答对一个问题为 E_x , $x=1,2$,

则 $E_1 = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$, 其中事件 $A_1\overline{A_2}$, $\overline{A_1}A_2$ 互斥,

所以 $P(E_1) = P(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2)$,

所以 $P(E_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$,

则 $P(E_2) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{16}$, $P(F_2) = P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{4}{25}$,

事件两人在两轮活动中共答对 3 个问题可表示为 $E_1F_2 + E_2F_1$, 其中事件 E_1F_2, E_2F_1 互斥, 事件

E_1, F_2 相互独立, 事件 E_2, F_1 相互独立,

$$\text{所以 } P(E_1 F_2 + E_2 F_1) = P(E_1)P(F_2) + P(E_2)P(F_1) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{25} + \frac{1}{16} \times \frac{12}{25} = \frac{9}{100},$$

所以两人在两轮活动中共答对 3 个问题的概率为 $\frac{9}{100}$,

故答案为: $\frac{12}{25}; \frac{9}{100}$.

34. 联合国教科文组织批准, 中国传统节日端午节正式列入世界非物质文化遗产, 同时, 端午节成为中国首个入选世界非物质文化遗产的节日. 为弘扬中国传统文化, 某校在端午节期间组织有关端午节文化知识竞赛活动, 某班甲、乙两人组成“粽队”参加竞赛活动, 每轮活动由甲、乙各回答一个问题, 已知每轮活动中甲、乙答对问题的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{2}{3}$, 且每轮活动中甲、乙答对与否互不影响, 各轮结果也互不影响. 则甲在两轮活动中答对两个问题的概率为_____, “粽队”在两轮活动中至少答对三个问题的概率为_____.

【答案】 $\frac{9}{16}$ $\frac{2}{3}$

【知识点】利用互斥事件的概率公式求概率、独立事件的乘法公式

【分析】根据题意, 设事件 A = “甲答对问题”, 事件 B = “乙答对问题”, 结合独立事件的概率乘法公式和互斥事件的概率加法公式, 即可求解.

【详解】设事件 A = “甲答对问题”, 事件 B = “乙答对问题”,

因为每轮活动中甲、乙答对与否互不影响, 各轮结果也互不影响,

所以甲在两轮活动中答对两个问题的概率为 $P_1 = P(A)P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$;

“粽队”在两轮活动中至少答对三个问题, 则包含 $ABAB, ABAB, ABAB, ABAB, ABAB$,

可得概率为 $P = P(ABAB) + P(ABAB) + P(ABAB) + P(ABAB) + P(ABAB)$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times (1 - \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times (1 - \frac{3}{4}) \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + (1 - \frac{3}{4}) \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{36}{144} + \frac{18}{144} + \frac{12}{144} + \frac{18}{144} + \frac{12}{144} = \frac{96}{144} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{9}{16}; \frac{2}{3}$.

35. 某超市拟定于周年庆当天举办一次有奖促销活动, 顾客一次消费满 500 元可参加一次抽奖活动, 规则如下: 有甲、乙两个不透明的箱子, 甲箱中有 2 个红球和 3 个黑球, 乙箱中有 1 个红球和 3 个黑球 (所有球除颜色外完全相同), 获得抽奖机会的顾客先从甲箱中随机取出 2 个球放入乙箱, 再从乙箱中随机取出 1 个球, 规定从乙箱中取出的球是红球的顾客中奖,

可获得 100 元返金券，则抽奖顾客中奖的概率为_____；据以往消费记录估计当天约有 800 位顾客抽奖，记中奖人数为 X ，则 $E(X)$ = _____.

【答案】 $\frac{3}{10}/0.3$ 240

【知识点】计算古典概型问题的概率、二项分布的均值、独立事件的乘法公式

【分析】由已知从甲箱中随机取出 2 个球有三种情况，放入乙箱后，分别计算其概率，即可求解；由已知可得 $X \sim B\left(800, \frac{3}{10}\right)$ ，根据二项分布期望的计算公式求解即可.

【详解】顾客从甲箱中随机取出 2 个球，可能情况分别为 2 个红球，1 个红球和 1 个黑球，2 个黑球，

若从甲箱中取出 2 个红球放入乙箱，则乙箱中有 3 个红球和 3 个黑球，

则从乙箱中随机取出 1 个球，取出的是红球的概率为 $\frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^2 \cdot C_6^1}$ ，

若从甲箱中取出 1 个红球和 1 个黑球放入乙箱，则乙箱中有 2 个红球和 4 个黑球，

则从乙箱中随机取出 1 个球，取出的是红球的概率为 $\frac{C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_1^1}{C_5^2 \cdot C_6^1}$ ，

若从甲箱中取出 2 个黑球，放入乙箱，则乙箱中有 1 个红球和 5 个黑球，

则从乙箱中随机取出 1 个球，取出的是红球的概率为 $\frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_6^1}$ ，

所以中奖的概率为 $\frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^2 \cdot C_6^1} + \frac{C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_1^1}{C_5^2 \cdot C_6^1} + \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_6^1} = \frac{3}{10}$ ；

每位顾客是否中奖相互独立，且中奖概率为 $\frac{3}{10}$ ，所以 $X \sim B\left(800, \frac{3}{10}\right)$ ，

所以 $E(X) = 800 \times \frac{3}{10} = 240$.

故答案为： $\frac{3}{10}$ ； 240.

36. 天津是一个历史悠久的文化古都，五大道，石家大院，古文化街，鼓楼这四个景点又是天津十分有名的旅游胜地. 已知某游客游览五大道的概率为 $\frac{2}{3}$ ，游览石家大院，古文化街，鼓楼的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，且该游客是否游览这四个景点相互独立，则该游客只游览一个景点的概率为_____；该游客至少游览三个景点的概率为_____.

【答案】 $\frac{5}{24}$ $\frac{3}{8}$

【知识点】互斥事件的概率加法公式、独立事件的乘法公式

【分析】根据互相独立事件的概率公式和互斥事件的概率加法公式求解即可.

【详解】该游客只游览一个景点的概率为 $\frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{24}$,

该游客游览三个景点的概率为 $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{24}$,

该游客游览四景点的概率为 $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}$,

所以该游客至少游览三个景点的概率为 $\frac{7}{24} + \frac{1}{12} = \frac{3}{8}$,

故答案为: $\frac{5}{24}$; $\frac{3}{8}$

37. 小轩操场跑步, 一周 2 次, 一次跑 5 圈或 6 圈. 第一次跑 5 圈或 6 圈的概率均为 0.5, 若第一次跑 5 圈, 则第二次跑 5 圈的概率为 0.3, 跑 6 圈的概率为 0.7; 若第一次跑 6 圈, 则第二次跑 5 圈的概率为 0.6, 跑 6 圈的概率为 0.4. 小轩一周跑 11 圈的概率为 _____; 若一周至少跑 11 圈为运动量达标, 则连续跑 4 周, 记合格周数为 X , 则 X 的期望 $E(X) =$ _____.

【答案】 $0.65/\frac{13}{20}$ 3.4

【知识点】二项分布的均值、利用全概率公式求概率、利用对立事件的概率公式求概率

【分析】设出事件, 利用全概率公式求出小轩一周跑 11 圈的概率; 再求出一周至少跑 11 圈的概率, 得到 $X \sim B(4, 0.85)$, 利用二项分布求期望公式进行求解.

【详解】设一周跑 11 圈为事件 A , 第一次跑 5 圈为事件 B , 第二次跑 5 圈为事件 C , 则 $P(B) = P(\bar{B}) = 0.5$, $P(C|B) = 0.3$, $P(\bar{C}|B) = 0.7$, $P(C|\bar{B}) = 0.6$, $P(\bar{C}|\bar{B}) = 0.4$,

故 $P(A) = P(B\bar{C}) + P(\bar{B}C) = P(B) \cdot P(\bar{C}|B) + P(\bar{B}) \cdot P(C|\bar{B})$
 $= 0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.6 = 0.65$;

一周跑 10 圈的概率为 $0.5 \times 0.3 = 0.15$, 故一周至少跑 11 圈的概率为 $1 - 0.15 = 0.85$,

故 $X \sim B(4, 0.85)$, 故 $E(X) = 4 \times 0.85 = 3.4$.

故答案为: 0.65, 3.4

38. 一个袋子里放有除颜色外完全相同的 2 个白球、3 个黑球.若采取有放回抽样方式,从中依次摸出两个小球,则两个小球颜色不同的概率为_____；若采取不放回抽样方式,从中依次摸出两个小球,则在第 1 次摸到的是黑球的条件下,第 2 次摸到的是黑球的概率为_____.

【答案】 $\frac{12}{25}$ $\frac{1}{2}$

【知识点】计算条件概率、计算古典概型问题的概率、独立事件的乘法公式

【分析】第一问分先白后黑和先黑后白两种情况,由概率公式计算;第二问利用条件概率公式即可求解.

【详解】令事件 A 表示用放回抽样方式摸出两个颜色不同的小球,

所以每次摸一个白球的概率为 $\frac{2}{5}$, 每一次摸一个黑球的概率为 $\frac{3}{5}$,

所以 $P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$,

令事件 B_i 表示第 i 次摸到黑球 $i=1,2$,

所以 $P(B_1) = \frac{3}{5}, P(B_1 B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$,

所以在第一次摸到黑球的条件下,第二次摸到黑球的概率为:

$$P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2},$$

故答案为: $\frac{12}{25}; \frac{1}{2}$.

39. 已知甲盒产品中有 4 个正品和 2 个次品,乙盒产品中有 3 个正品和 2 个次品,若从甲盒中任取 2 个产品,则这 2 个产品中有一个为正品的条件下,另一个为次品的概率_____.
若先从甲盒中任取 2 个产品,放入乙盒,再从乙盒任取一个产品,则取出的这个产品是正品的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$ $\frac{13}{21}$

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率、求超几何分布的概率

【分析】由条件概率公式得到第一个空;由超几何分布,分别计算出从甲中取出的是两个正品、一个正品一个次品、两个次品的概率,再由全概率公式得到第二个空的答案.

【详解】设事件 A 为“从甲中取出的 2 件产品中有一个为正品”,事件 B 为“从甲中取出的 2 个

产品中有一个为次品”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_4^2 + C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{14}{15}, \quad P(AB) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad \text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{14}{15}} = \frac{4}{7};$$

设事件 C 为“从乙中取出的这个产品是正品”，事件 D_1 为“从甲中取出两个正品”，

事件 D_2 为“从甲中取出一个正品、一个次品”，事件 D_3 为“从甲中取出两个次品”，

$$\text{则 } P(D_1) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}, \quad P(D_2) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad P(D_3) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$P(C|D_1) = \frac{5}{7}, \quad P(C|D_2) = \frac{4}{7}, \quad P(C|D_3) = \frac{3}{7},$$

由全概率公式得

$$P(C) = P(D_1)P(C|D_1) + P(D_2)P(C|D_2) + P(D_3)P(C|D_3) = \frac{6}{15} \times \frac{5}{7} + \frac{8}{15} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{15} \times \frac{3}{7} = \frac{65}{105} = \frac{13}{21}$$

故答案为： $\frac{4}{7}$ ； $\frac{13}{21}$.

40. 某校高三 1 班第一小组有男生 4 人，女生 2 人，为提高中学生对劳动教育重要性的认识，现需从中抽取 2 人参加学校开展的劳动技能学习，恰有一名女生参加劳动学习的概率则为 _____；在有女生参加劳动学习的条件下，都是女生参加劳动学习的概率 _____.

【答案】 $\frac{8}{15}$ $\frac{1}{9}$

【知识点】 计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】 设 A 表示事件“恰有一名女生参加学习”， B 表示事件“有女生参加劳动学习”，设 C 表示事件“都是女生参加劳动学习”，结合组合数公式和条件概率公式，可分别求得.

【详解】 设 A 表示事件“恰有一名女生参加学习”， B 表示事件“有女生参加劳动学习”，设 C 表示事件“都是女生参加劳动学习”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad P(B) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_2^2}{C_6^2} = \frac{9}{15}, \quad P(C) = P(BC) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$\text{所以 } P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{1}{9},$$

故答案为： $\frac{8}{15}$ ； $\frac{1}{9}$ 。