

二项分布与超几何分布

一、随机变量及其分布

1. 从一个装有 3 个白球和 5 个黑球的袋子中无放回地取球 2 次，每次取球 1 个，记 X 为取得白球的次数，则 $E(X) =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{4}$ / 0.75

【分析】 由随机变量 X 服从超几何分布，从而可得随机变量的期望值.

【详解】 因为 X 为取得白球的次数，所以 X 的可能的值为 0, 1, 2, 且随机变量 X 服从超几何分布.

$$P(x=0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}, \quad P(x=1) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}, \quad P(x=2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}.$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

故答案为： $\frac{3}{4}$.

2. CBA 季后赛总决赛在甲、乙两支球队进行，总决赛采用七局四胜制（7 场 4 胜），总决赛的主场优势授予常规赛排名更高的球队，采用“2-2-1-1-1”的主客场安排（即排名高的球队先打两个主场，然后是对手的两个主场，之后若需要，交替进行一个主场）。设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，若甲球队常规赛排名更高，那么甲队 4:2 获胜的概率是_____.

【答案】 0.171

【分析】 依题意可得甲队在前五场比赛中，赢 3 场输 2 场，第六场赢，分三个主场全胜、两个客场全负，三个主场 2 胜 1 负、两个客场 1 胜 1 负，三个主场 1 胜 2 负、两个客场 2 胜三种情况利用相互独立事件的概率公式计算可得.

【详解】甲队在前五场比赛中，赢3场输2场，第六场赢.

又前五场中甲队有三个主场，两个客场，第六场为客场.

甲队三个主场全胜，两个客场全负以4:2获胜的概率是 $0.6^3 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.027$;

甲队三个主场2胜1负，两个客场1胜1负以4:2获胜的概率是

$$(C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4) \times (C_2^1 \times 0.5 \times 0.5) \times 0.5 = 0.108;$$

甲队三个主场1胜2负，两个客场2胜以4:2获胜的概率是

$$(C_3^1 \times 0.6 \times 0.4^2) \times (0.5 \times 0.5) \times 0.5 = 0.036;$$

综上所述，甲队以4:2获胜的概率 $P = 0.027 + 0.108 + 0.036 = 0.171$.

故答案为：0.171

3. 已知甲盒产品中有4个正品和2个次品，乙盒产品中有3个正品和2个次品，若从甲盒中任取2个产品，则这2个产品中有一个为正品的条件下，另一个为次品的概率_____.

若先从甲盒中任取2个产品，放入乙盒，再从乙盒任取一个产品，则取出的这个产品是正品的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$ $\frac{13}{21}$

【分析】由条件概率公式得到第一个空；由超几何分布，分别计算出从甲中取出的是两个正品、一个正品一个次品、两个次品的概率，再由全概率公式得到第二个空的答案.

【详解】设事件 A 为“从甲中取出的2件产品中有一个为正品”，事件 B 为“从甲中取出的2个产品中有一个为次品”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_4^2 + C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{14}{15}, \quad P(AB) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad \text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{14}{15}} = \frac{4}{7};$$

设事件 C 为“从乙中取出的这个产品是正品”，事件 D_1 为“从甲中取出两个正品”，

事件 D_2 为“从甲中取出一个正品、一个次品”，事件 D_3 为“从甲中取出两个次品”，

$$\text{则 } P(D_1) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}, P(D_2) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, P(D_3) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$P(C|D_1) = \frac{5}{7}, P(C|D_2) = \frac{4}{7}, P(C|D_3) = \frac{3}{7},$$

由全概率公式得

$$P(C) = P(D_1)P(C|D_1) + P(D_2)P(C|D_2) + P(D_3)P(C|D_3) = \frac{6}{15} \times \frac{5}{7} + \frac{8}{15} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{15} \times \frac{3}{7} = \frac{65}{105} = \frac{13}{21}$$

故答案为: $\frac{4}{7}; \frac{13}{21}$.

4. 为帮助学生减压,高三某班准备了“幸运抽奖箱”,箱中共有 10 张卡片,其中 6 张为“获奖卡”.每位同学随机抽取 3 张,抽到获奖卡可兑换奖品,每人抽完后箱中恢复原先 10 张卡片.甲同学参加了一次抽奖活动,则甲同学恰好抽到 2 张“获奖卡”的概率为_____;若该班有 60 名同学,每人都恰参加一次抽奖活动,则至少抽到 1 张“获奖卡”的人数的均值是_____.

【答案】 $\frac{1}{2};$ 58

【分析】由古典概型的概率公式代入计算,即可得到甲同学恰好抽到 2 张“获奖卡”的概率,再由二项分布的期望公式代入计算,即可得到结果.

【详解】甲同学恰好抽到 2 张“获奖卡”的概率为 $P = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2};$

至少抽到 1 张“获奖卡”的概率为 $P = 1 - \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{29}{30}$,

设至少抽到 1 张“获奖卡”的人数为 X , 则 $X \sim B\left(60, \frac{29}{30}\right)$,

所以 $E(X) = 60 \times \frac{29}{30} = 58$.

故答案为: $\frac{1}{2}$; 58

5. 甲、乙两队参加知识竞赛, 每队 3 人, 每人回答一个问题, 答对者为本队赢得一分, 答错得零分. 假设甲队中每人答对的概率均为 $\frac{2}{3}$, 乙队中 3 人答对的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, 且各人正确与否相互之间没有影响. 用 ξ 表示甲队的总得分, 则随机变量 ξ 的数学期望为 _____; 用 A 表示“甲、乙两个队总得分之和等于 3”这一事件, 用 B 表示“甲队总得分大于乙队总得分”这一事件, 则 $P(AB) =$ _____.

【答案】 2 $\frac{10}{81}$

【分析】利用二项分布期望公式可得 $E(\xi)$; 利用二项分布概率公式求出 $P(\xi=2)$ 、 $P(\xi=3)$, 设乙队总得分为 X , 利用独立事件概率公式求出 $P(X=1)$ 、 $P(X=2)$, 则可求出 $P(AB)$.

【详解】由题意可得 $\xi \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$, 则 $E(\xi) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$;

$P(\xi=2) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$, $P(\xi=3) = C_3^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$,

设乙队总得分为 X , 则 $P(X=1) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$$+\left(1-\frac{3}{4}\right) \times\left(1-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=0)=\left(1-\frac{3}{4}\right) \times\left(1-\frac{2}{3}\right) \times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24},$$

$$\text { 则 } P(AB)=P(\xi=2, X=1)+P(\xi=3, X=0)=\frac{4}{9} \times \frac{1}{4}+\frac{8}{27} \times \frac{1}{24}=\frac{1}{9}+\frac{1}{81}=\frac{10}{81}.$$

6. 有一个摸奖游戏, 在一个口袋中装有 7 个红球和 3 个白球, 这些球除颜色外完全相同, 一次性从中摸出 6 个球, 至少摸到 2 个白球就中奖, 则中奖的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】根据超几何分布概率公式, 即可求解.

【详解】记中奖为事件 A , 概率为 $P(A)=\frac{C_3^2 C_7^4+C_3^3 C_7^3}{C_{10}^6}=\frac{2}{3}$, 所以中奖的概率为 $\frac{2}{3}$,

故答案为: $\frac{2}{3}$.

7. 为庆祝第 19 届亚运会在我国杭州举行, 杭州某中学举办了一次“亚运知识知多少”的知识竞赛. 参赛选手从 7 道题 (4 道多选题, 3 道单选题) 中随机抽题进行作答, 若某选手先随机抽取 2 道题, 再随机抽取 1 道题, 则最后抽取到的题为多选题的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$

【分析】根据题意讨论先抽取 2 道题有几道多选题, 结合超几何分布分析运算.

【详解】设先抽取 2 道题中多选题的题数为 X , 则 X 的可能取值为: 0, 1, 2,

$$\text { 可得: } P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}, P(X=1)=\frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}, P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7},$$

所以最后抽取到的题为多选题的概率为

$$P=P(X=0) \times \frac{4}{5}+P(X=1) \times \frac{3}{5}+P(X=2) \times \frac{2}{5}=\frac{1}{7} \times \frac{4}{5}+\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}+\frac{2}{7} \times \frac{2}{5}=\frac{4}{7}.$$

故答案为: $\frac{4}{7}$.

8. 某校高三 1 班第一小组有男生 4 人, 女生 2 人, 为提高中学生对劳动教育重要性的认识, 现需从中抽取 2 人参加学校开展的劳动技能学习, 恰有一名女生参加劳动学习的概率则为_____; 在至少有一名女生参加劳动学习的条件下, 恰有一名女生参加劳动学习的概率_____.

【答案】 $\frac{8}{15}$ $\frac{8}{9}$

【分析】应用组合数，超几何分布的概率求法求恰有一名女生参加、至少有一名女生参加的概率，进而求至少有一名女生参加条件下，恰有一名女生的概率（条件概率）。

【详解】由题设，抽取 2 人，恰有一名女生参加，其概率 $\frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$ ，

至少有一名女生参加，事件含恰有一名女生、2 人都是女生，其概率 $\frac{C_2^2 + C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}$ ，

所以，在至少有一名女生参加条件下，恰有一名女生的概率 $\frac{8}{15} \div \frac{3}{5} = \frac{8}{9}$ 。

故答案为： $\frac{8}{15}$ ， $\frac{8}{9}$

9. 早期的生成式人工智能原理是“单字接龙”，人工智能模型会进行“算法预测”。例如输入“白日”之后，系统会检索文本库中包含“白日”的词语或短句，假设文本库中包含“白日”的词语或短句只有“白日梦”和“白日依山尽”，且二者在文本库中出现的频率为 0.8 和 0.2，则模型下一个字输出“梦”和“依”的概率分别为 0.8 和 0.2，依此类推生成下一个汉字。假设有一个简化的人工智能模型，仅能生成四个汉字，生成每个汉字之前都需要对前面的所有汉字进行“算法预测”，并且每一步判断是相互独立的。该人工智能模型的文本库如下：

人大附小	人民英雄	人大附中集团校
人大附中	人才济济	人大代表
人民大学	人大附幼儿园	地灵人杰
学为人师	助人为乐	人大附中东门

输入“人”后，下一个字输出“大”的概率为_____；

输入“人”后，最终输出结果为“人大附中”的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}/0.5$ $\frac{1}{4}/0.25$

【分析】根据古典概型概率公式求解

【详解】文本库中包含“人”的所有短语为：

人大附小、人民英雄、人大附中集团校、人大附中、人才济济、人大代表、人民大学、人大附幼儿园、地灵人杰、学为人师、助人为乐、人大附中东门

统计“人”之后的第一个字：

大（出现于：人大附小、人大附中集团校、人大附中、人大代表、人大附幼儿园、人大附中东门，共 6 次）

民（出现于：人民英雄、人民大学，共 2 次）

才（出现于：人才济济，共 1 次）

杰（出现于：地灵人杰，共 1 次）

师（出现于：学为人师，共 1 次）

为（出现于：助人为乐，共 1 次）

总样本数 = $6 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12$

输出“大”的概率 = $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ；

生成“人大附中”需要依次满足：

（1）. 输入“人”→“大”：概率 = $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

（2）. 输入“人大”→“附”：文本库中以“人大”开头的短语为：人大附小、人大附中集团校、人大附中、人大代表、人大附幼儿园、人大附中东门 → 共 6 条，其中“人大”后接“附”的有：

人大附小、人大附中集团校、人大附中、人大附幼儿园、人大附中东门 → 共 5 条，概率 = $\frac{5}{6}$ ，

(3). 输入“人大附”→“中”：文本库中以“人大附”开头的短语为：人大附小、人大附中集团校、人大附中、人大附幼儿园、人大附中东门 → 共 5 条，其中“人大附”后接“中”的有：人大附中集团校、人大附中、人大附中东门 → 共 3 条，概率 = $\frac{3}{5}$ ，

三步独立事件，总概率 = $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{4}$ ；

故答案为： $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

10. 某单位组织知识竞赛，按照比赛规则，每位参赛者从 5 道备选题中随机抽取 3 道题作答. 假设在 5 道备选题中，甲答对每道题的概率都是 $\frac{2}{3}$ ，且每道题答对与否互不影响，则甲恰好答对其中两道题的概率为_____；若乙能答对其中 3 道题且另外两道题不能答对，则乙恰好答对两道题的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{5}$

【分析】(1) 甲能够答对 X 道题目，则 $X \sim B(3, \frac{2}{3})$ ，根据二项分布的概率即可进一步求解；

(2) 设乙能够答对 Y 道题目，根据超几何分布即可求出答案.

【详解】解设甲能够答对 X 道题目， $X \sim B(3, \frac{2}{3})$ ，

所以 $P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$ ，

解设乙能够答对 Y 道题目，

$$\text{则 } P(Y=2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}.$$

故答案为: $\frac{4}{9}; \frac{3}{5}$.

11. 在数字通信中, 信号是由数字 0 和 1 组成的序列. 由于随机因素的干扰, 发送的信号 0 或 1 有可能被错误地接收为 1 或 0. 当发送信号 0 时, 接收为 0 和 1 的概率分别为 0.7 和 0.3; 当发送信号 1 时, 接收为 1 和 0 的概率分别为 0.8 和 0.2. 假设发送信号 0 和 1 是等可能的. 某次信号传递中, 在接收的信号为 00 的条件下, 则传递过程中没有出错的概率为_____.

【答案】 $\frac{49}{81}$

【分析】 利用条件概率公式、独立事件的乘法公式计算即可.

【详解】 设“接收的信号为 00”为事件 A , “传递过程中没有出错”为事件 B ,

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.5 \times 0.7 \times 0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.7 \times 0.5 \times 0.2 + 0.5 \times 0.2 \times 0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.2 \times 0.5 \times 0.2 \\ &= 0.25 \times 0.81. \end{aligned}$$

$$P(AB) = 0.5 \times 0.7 \times 0.5 \times 0.7 = 0.25 \times 0.49.$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.25 \times 0.49}{0.25 \times 0.81} = \frac{49}{81}.$$

12. 有 5 道题, 5 名女生中有 2 人每题都不能答对, 其余 3 人每题都能答对, 3 名男生每人每题答对的概率均为 $\frac{1}{2}$. 现从上述 5 名女生中选择 2 名女生和 3 名男生答题, 每人答一题, 答对得 2 分, 答错得 0 分, 记得分之和为 X , 则 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{27}{5}/5.4$

【分析】 列出 X 所有取值, 根据古典概型求解选出女生的概率, 根据二项分布求解男生答题情况对应的概率, 进而根据独立事件乘法公式求解每种取值对应的概率, 再结合期望公式求解即可.

【详解】 X 的可能取值为 0, 2, 4, 6, 8, 10,

$$P(X=0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} \times C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{80},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} \times C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{C_2^2}{C_5^2} \times C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{80},$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^2}{C_5^2} \times C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} \times C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{C_2^2}{C_5^2} \times C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{10},$$

$$P(X=6) = \frac{C_2^2}{C_5^2} \times C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} \times C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{C_2^2}{C_5^2} \times C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{20},$$

$$P(X=8) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} \times C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{C_2^2}{C_5^2} \times C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16},$$

$$P(X=10) = \frac{C_2^2}{C_5^2} \times C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{80},$$

$$\text{所以 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{80} + 2 \times \frac{9}{80} + 4 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{7}{20} + 8 \times \frac{3}{16} + 10 \times \frac{3}{80} = \frac{27}{5}.$$

13. 某学习小组有男生 4 人，女生 3 人，现需从中抽取 2 人参加学校开展的 AI 人工智能学习，则恰有一名男生参加的概率为_____；在有女生参加学习的条件下，恰有一名女生参加 AI 人工智能学习的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{5}/0.8$

【分析】利用超几何概型的概率、古典概型求法及组合数求概率即可.

【详解】由题设，恰有一名男生参加的概率为 $P_1 = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$,

有女生参加学习的条件下，恰有一名女生参加的概率为 $P_2 = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_4^1 C_3^1 + C_3^2} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

故答案为： $\frac{4}{7}, \frac{4}{5}$

14. 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）。根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”。设甲队主场取胜的概率为0.6，客场取胜的概率为0.5，且各场比赛结果相互独立，则乙队以4:1获胜的概率是_____.

【答案】 0.08

【分析】乙队以4:1获胜的概率，则甲队可能在第一场到第四场中任意胜一场，再根据各场比赛结果相互独立计算出乙队获胜的概率，再相加可求出乙队以4:1获胜的概率.

【详解】由题可知乙在甲主场取胜概率为 $1-0.6=0.4$ ，乙在甲客场取胜概率为 $1-0.5=0.5$ ，前五场主客安排为：（甲）主主客客主

则甲胜第一场（主）： $P_1=0.6 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4=0.024$ ，

则甲胜第二场（主）： $P_2=0.4 \times 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4=0.024$ ，

则甲胜第三场（客）： $P_3=0.4 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4=0.016$ ，

则甲胜第四场（客）： $P_4=0.4 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4=0.016$ ，

乙队以4:1获胜的概率 $P=P_1+P_2+P_3+P_4=0.024+0.024+0.016+0.016=0.08$.

故答案为： 0.08

15. 某闯关游戏设置了3个关卡，每关玩家先从道具A、B中随机选择1个（不同关卡可选同一个道具），再进行闯关，已知使用道具A通过对应关卡的概率为 $\frac{2}{3}$ ，使用道具B通过对应关卡的概率为 $\frac{1}{2}$ ；且每个关卡的道具选择、闯关结果均相互独立. 若玩家必须按“关卡1→关卡2→关卡3”的顺序挑战，且只有通过前一关才能进入下一关，记该玩家最终恰好通过2个关卡的概率为 p ，则 $p=$ _____.

【答案】 $\frac{245}{1728}$

【详解】设 M ：“某一关卡通过”， P ：“选择道具A”， $P(P)=\frac{1}{2}$ ， Q ：“选择道具B”， $P(Q)=\frac{1}{2}$.

因为每个关卡道具选择、闯关结果相互独立，

所以单个关卡通过的概率：

$$P(M) = P(P)P(M|P) + P(Q)P(M|Q) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

所以第一、二关通过，第三关未通过的概率：

$$p = P(M) \cdot P(M) \cdot (1 - P(M)) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{245}{1728}.$$

16. 盒子里有大小和形状完全相同的 4 个黑球和 6 个红球，每次从中随机取一个球，取后不放回. 在第一次取到黑球的条件下，第二次取到黑球的概率是_____；若连续取 2 次球，设随机变量 X 表示取到的黑球个数，则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{5}/0.8$

【分析】第一空由条件概率公式可求出结果；第二空由超几何分布求出期望.

【详解】设第一次取到黑球为事件 A ，第二次取到黑球为事件 B ，

$$\text{则 } P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(AB) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3};$$

由题意可得 X 的取值为 0, 1, 2，

$$P(X=0) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}, P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}, P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15},$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5},$$

故答案为: $\frac{1}{3}; \frac{4}{5}$.

17. 某学校进行了一次抽样调查, 了解不同性别的学生“利用 AI 辅助学习”的情况, 采用简单随机抽样的方法, 分别抽取男生和女生各 50 名作为样本. 记“利用 AI 辅助学习”为事件 A , “学生为女生”为事件 B , 将样本的频率视为概率, 得到 $P(A|B) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{5}{12}$. 现从全校的学生中随机抽取 30 名, 设其中“利用 AI 辅助学习的学生”的人数为 X , 则当 $P(X=k)$ 取得最大值时, $k(k \in \mathbf{N}^*)$ 的值为_____.

【答案】18

【分析】借助条件概率公式可计算出 $P(A)$, 再利用二项分布概率公式, 表示出 $P(X=k)$ 后,

解出不等式 $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \geq 1$ 及 $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \leq 1$ 即可得.

【详解】由题意可得 $P(B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 2P(AB) = \frac{1}{2}$, 即 $P(AB) = \frac{1}{4}$,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{P(A)} = \frac{5}{12}, \text{ 则 } P(A) = \frac{3}{5},$$

则可得 X 服从二项分布 $\left(30, \frac{3}{5}\right)$, 则 $P(X=k) = C_{30}^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{30-k}$,

$$\text{令 } \frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{C_{30}^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{30-k}}{C_{30}^{k-1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{31-k}} = \frac{\frac{30!}{k!(30-k)!} \times \frac{3}{5}}{\frac{30!}{(k-1)!(31-k)!} \times \frac{2}{5}} = \frac{3(31-k)}{2k} \geq 1,$$

即有 $93-3k \geq 2k$, 解得 $k \leq \frac{93}{5}$,

$$\text{令 } \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{C_{30}^{k+1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{29-k}}{C_{30}^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{30-k}} = \frac{\frac{30!}{(k+1)!(29-k)!} \times \frac{3}{5}}{\frac{30!}{k!(30-k)!} \times \frac{2}{5}} = \frac{3(30-k)}{2(k+1)} \leq 1$$

即有 $90-3k \leq 2k+2$, 解得 $k \geq \frac{88}{5}$,

即 $\frac{88}{5} \leq k \leq \frac{93}{5}$, 由 $k \in \mathbf{N}^*$, 则当 $P(X=k)$ 取得最大值时, $k=18$.

18. 甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语, 若一方猜对且另一方猜错, 则猜对的一方

获胜，否则本次平局，已知每次活动中，甲、乙猜对的概率分别为 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{1}{5}$ ，且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响，各次活动也互不影响，则一次活动中，甲获胜的概率为_____；若3次活动中，甲获胜的次数记为 X ，则随机变量 X 的期望为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$ 2

【分析】设甲、乙在猜谜活动中猜对分别为事件 A 、 B ，根据相互独立事件概率的乘法公式计算即可求出甲获胜的概率；分析出甲获胜的次数 X 服从二项分布，再根据二项分布的期望公式计算即可.

【详解】设甲在猜谜活动中猜对为事件 A ，设乙在猜谜活动中猜对为事件 B ，

则由题意知，甲猜对的概率 $P(A)=\frac{5}{6}$ ，乙猜对的概率 $P(B)=\frac{1}{5}$.

在一次猜谜活动中，甲获胜即甲猜对，乙猜错为事件 $A\bar{B}$ ，

则甲获胜的概率 $P(A\bar{B})=P(A)\cdot P(\bar{B})=P(A)\cdot[1-P(B)]=\frac{5}{6}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{3}$ ；

由题意可知，甲获胜的次数 X 服从二项分布 $X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$ ，

所以随机变量 X 的期望为 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$.

19. 甲、乙两名同学参加一场乒乓球比赛，比赛共五局（无平局），先赢三局者取得比赛最终胜利.已知第一局乙同学获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，且对于每一局，若乙同学在本局中获胜，则他在下一局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ；若乙同学在本局中未获胜，则他在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$.甲同学第二局比赛获胜的概率为_____；在比赛三局即结束的条件下，乙同学取得比赛最终胜利的概率为_____.

【答案】 $\frac{5}{9}$ $\frac{1}{3}$

【分析】根据全概率公式及独立事件的概率乘法公式，分类讨论甲第二局获胜的不同情况，求得甲第二局获胜的概率；再根据条件概率公式，求出各事件的概率，根据公式求出条件概率.

【详解】第一局乙同学获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，则第一局甲同学获胜的概率为 $\frac{2}{3}$

对于每一局，若乙同学在本局中获胜，则他在下一局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ，即甲同学在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，

若乙同学在本局中未获胜，则他在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，即甲同学在下一局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$.

故甲同学第二局比赛获胜的概率 $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

比赛三局即结束，则甲连胜三局或乙连胜三局，

设事件 A 为“比赛进行三局即结束”，事件 B 为“乙取得比赛最终胜利”

则 $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ， $P(AB) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ ，

故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{5}{9}$ ； $\frac{1}{3}$.

20. 在高考志愿模拟填报实验中，共有 9 个专业可供学生甲填报，其中学生甲感兴趣的专业有 3 个. 若在实验中，学生甲随机选择 3 个专业进行填报，则填报的专业中至少有 1 个是学生甲感兴趣的概率为_____.

【答案】 $\frac{16}{21}$

【分析】计算基本事件总数，计算其中没有感兴趣的专业包含的基本事件数，利用对立事件解决所求的概率.

【详解】随机选择 3 个专业，基本事件总数为 $C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$,

填报的专业中没有感兴趣的专业包含的基本事件数为 $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$,

由题可知，填报的专业中至少有 1 个是学生甲感兴趣的概率为 $1 - \frac{C_6^3}{C_9^3} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{16}{21}$.

故答案为: $\frac{16}{21}$.